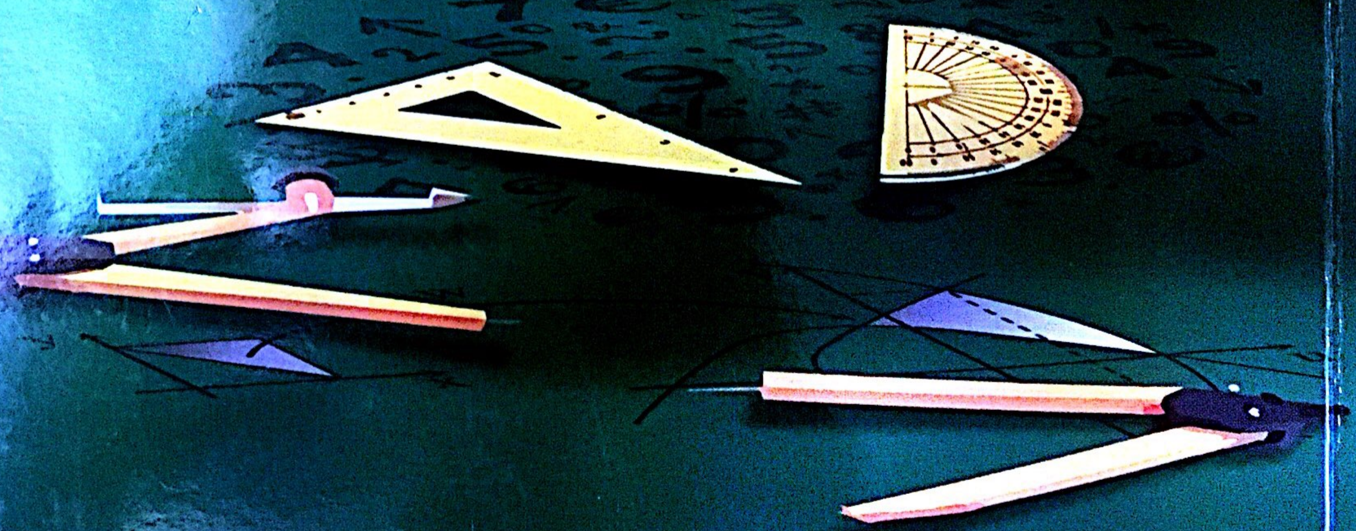
مجموعه کتاب های

ویرایش جدید

ریاضی مهندسی

نمونه سؤالات و پاسخهای دروس دانشگاهی

(ویژه دانشگاههای آزاد اسلامی استان تهران)



گردآوری و تالیف: امید سرباخته

Scanned by CamScanner

ریاضی مهندسی

نمونه سؤالات و پاسخهای دروس دانشگاهی

(ویژه دانشگاههای آزاد اسلامی استان تهران)

شامل نمونه سؤالاتی از واحدهای

تهران جنوب

تهران مرکز

تهران شرق

فیروزکوه

پرند

انتشارات آموزشی آمد

گردآوری و تألیف: امید سرباخته

پاییز ۱۳۹۴

Scanned by CamScanner

فهرست مطالب

۱ سری فوریه
۷
پاسخ ۴۱

۲ انتگرال فوریه و تبدیل آن
پرسش ۱۱
پاسخ ۵۱

۳ معادلات با مشتقات جزئی
پرسش ۱۵
پاسخ ۵۹

۴ توابع مختلط
پرسش ۲۳
پاسخ ۹۷

۵ انتگرالهای مختلط
پرسش ۲۷
پاسخ ۱۱۱

۶ نگاشت
پرسش ۳۷
پاسخ ۱۴۹

Scanned by CamScanner

فصل ۱

پاسخ ۴۱

سری فوریه

۱ **دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳**

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۱

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ \quad , & -\frac{\pi}{۲}<x\leq\frac{\pi}{۲} \\ ۰ \quad , & \frac{\pi}{۲}<x\leq\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$ را بیابید و به کمک آن ثابت کنید:

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۴}+....=\frac{\pi}{۴}$$

۲ **دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲**

سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} -\pi-x & -\pi<x<۰ \\ \pi-x & ۰<x<\pi \end{cases}$ را به‌دست آورید و سپس به کمک آن سری عددی زیر را بیابید

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots$$

۳ **دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲**

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

حاصل $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^{۲}}$ را به‌کمک سری فوریه تابع $-۱<x<۱$ و $f(x)=|x|$ بیابید.

Scanned by CamScanner

(ویژه دانشگاههای آزاد اسلامی استان تهران)

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ با دوره تناوب 2π در فاصله $[-\pi,\pi]$ را یافته و سپس از آن نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

به‌کمک سری فوریه کسینوسی تابع $0\le x<\pi \quad , \quad f(x)=\cos\frac{x}{2}$، حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ را به‌دست آورید.

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

فرض کنید ولتاژ خروجی یک مولد برق، دارای موج مربعی بر حسب زمان با دوره تناوب ۸ ثانیه بوده و طبق قانون $V(t)$ تولید شود.

الف) سری فوریه $V(t)$ را به‌دست آورید.

$$V(t)=\begin{cases}0 & -4<t<0\\ 10 & 0<t<4\end{cases}$$

ب) اگر $S_n(t)$ مجموع n جمله اول سری فوریه باشد، نمودارهای $S_2(t), S_1(t), V(t)$ را در یک دستگاه رسم کنید.

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

سری فوریه تابع $-\pi<x<\pi \quad , \quad f(x)=x^2$ را به‌دست آورید و سپس به کمک آن حاصل سری عددی زیر را بیابید.

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

سری فوریه تابع $f(x)=\cos\frac{x}{2}(|x|\le\pi) \quad , \quad f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید و از آن نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}=2$$

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

الف) سری فوریه تابع $\begin{cases}f(x)=x\sin x \quad , \quad -\pi<x<\pi\\ f(x+2\pi)=f(x)\end{cases}$ به‌دست آورید.

ب) به‌کمک (الف) حاصل سری $\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^n}{n^2-1}+\dots$ را بیابید.

Scanned by CamScanner

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره تناوب L باشد، در این صورت سری فوریه آن را می‌توان به‌صورت $f(x)=A_۰+\sum_{n=۱}^{\infty}(A_n\cos n\omega x+B_n\sin n\omega x)$ نوشت. مطلوب است محاسبه ضرایب $A_۰$، A_n و B_n.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

با فرض آنکه $f(x)=|\sin x|$ تابعی متناوب با دوره تناوب π است. سری فوریه آن را بیابید.

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

متعامد بودن دنباله $\{\sin(n\pi\ln x)\}_{n=۱}^{\infty}$ را بر بازه $[۱,e]$ نسبت به تابع وزن $w(x)=\frac{۱}{x}$ بررسی کنید.

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

الف) به کمک بسط فوریه تابع $f(t)=\begin{cases}-۱ & -\pi<t<۰\\ ۱ & ۰<t<\pi\end{cases}$ نشان دهید: $\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}...$

ب) به کمک بسط انتگرال $f(t)$ نشان دهید: $\frac{\pi^۲}{۸}=۱+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+...$

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

سری فوریه توابع زیر را بنویسید.

الف) $f(x)=x \qquad -۱<x\le ۱ \qquad T=۲$

ب) $f(x)=\begin{cases}۰ & -\pi<x<۰\\ ۱ & ۰<x<\pi\end{cases}$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

سری فوریه $f(x)=۳x^۲-۲x$ که $-\pi<x<\pi$, $(f(x+۲\pi)=f(x))$ را یافته و سپس به کمک آن مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}$ را به‌دست آورید.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

سری فوریه تابع $f(x)=x^۲+۳\sin ۲x \ ; \ -\frac{\pi}{۲}\le x<\frac{\pi}{۲}$ را بنویسید و مقدار سری فوریه به‌دست آمده را در نقاط $x_۰=۰$ و $x_۱=\frac{\pi}{۲}$ تعیین کنید.

Scanned by CamScanner

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

سری فوریه تابع $f(x)=x^{2}$ را در فاصله $-1<x<1$ تعیین کنید و با استفاده از آن نشان دهید:

$$1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\frac{1}{4^{2}}+\cdots=\frac{\pi^{2}}{12}$$

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف) سری فوریه $f(x)=|x|$ و $-\pi<x<\pi$, $f(x+2\pi)=f(x)$ را بدست آورید.

ب) به کمک اتحاد پارسوال، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{4}}$ را محاسبه کنید.

Scanned by CamScanner

فصل ۲

پاسخ ۵۱

انتگرال فوریه و تبدیل آن

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

با استفاده از انتگرال فوریه تابع زیر مقدار انتگرال ناسره $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ |x|<1\\ 0 & ; \ |x|>1\end{cases}$$

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

انتگرال کسینوسی فوریه $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin(x) & 0\le x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ را بیابید و سپس به کمک آن مقدار انتگرال ناسره روبرو را محاسبه کنید.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1+\cos \pi w}{1-w^{2}}dw$$

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال فوریه تابع مختلط تابع $x\in\mathbb{R}$; $f(x)=e^{-|x|}$ را بیابید.

Scanned by CamScanner

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ را یافته و انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

انتگرال فوریه $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ را بیابید و سپس به کمک آن حاصل انتگرال ناسره زیر را

$$\int_0^\infty \frac{w\sin w\pi}{1-w^2}dw$$

محاسبه کنید.

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

به کمک انتگرال فوریه مناسب نشان دهید:

$$\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}\cos\omega x\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

انتگرال فوریه تابع روبرو را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ \frac{\pi}{2} & , \quad x=0\\ \pi e^{-x} & , \quad x>0\end{cases}$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

تابع روبرو مفروض است. مطلوب است:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \pi e^{-x} & x>0\end{cases}$$

الف) انتگرال فوریه

ب) مقدار عددی انتگرال فوریه را در نقطه $x=0$ بیابید.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , \quad |x|<1\\ 0 & , \quad |x|>1\end{cases}$ را بیابید و سپس به کمک آن مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\frac{\omega}{3}d\omega$$

Scanned by CamScanner

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x)=e^{-|x|}\ ;\ x\in\mathbb{R}$، حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\alpha\ln 3)}{1+\alpha^2}d\alpha$ را بیابید.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

برابری روبرو را نشان دهید.

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega=\begin{cases}0 & ;\quad x<0\\ \frac{\pi}{2} & ;\quad x=0\\ \pi e^{-x} & ;\quad x>0\end{cases}$$

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

به کمک انتگرال فوریه تابع $\begin{cases}f(x)=\pi e^{-x} & x>0\\ f(x)=f(-x) & x<0\end{cases}$ حاصل $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos w}{1+w^2}dw$ را بیابید.

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال فوریه کسینوسی $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ را به‌دست آورید.

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}x+\sin x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ را بیابید.

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & x\ge 1\end{cases}$ را یافته و سپس حاصل انتگرال $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\cos ax}{x}dx$ را برای $0\le a\le 1$ به دست آورید.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

با روش تبدیل فوریه کسینوسی مسئله روبرو را حل کنید.

$$u_{tt}=u_{xx}$$
$$u_t(x,0)=u_x(0,t)=0\ ,\ x\ge 0\ ,\ t>0$$
$$u(x,0)=\begin{cases}1 & ,\quad 0\le x\le 1\\ 0 & ,\quad x>1\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

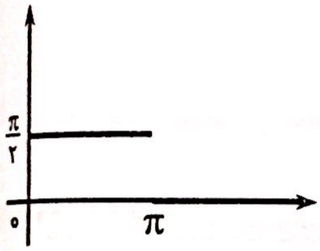
۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگـرال فوریـه تـابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & |x|>\frac{\pi}{۲}\end{cases}$ را یافتـه و سـپس بـه کمـک آن، مقـدار انتگـرال $\int_۰^\infty \frac{\cos\frac{\pi}{۲}x}{۱-x^۲}dx$ را بیابید.

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

با استفاده ازنمایش انتگرال فوریه، نشان دهیـد: $\int_۰^\infty \frac{۱-\cos\pi\omega}{\omega}\sin x\omega d\omega=\varphi(x)$

که در آن تابع $\varphi(x)$ دارای نمودار به فرم روبرو است. $(x\neq\pi)$



۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

به کمک انتگرال فوریه مناسب، نشان دهید:

$$\int_۰^\infty \frac{\sin\pi w\sin wx}{۱-w^۲}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}\sin x & ۰\le x\le\pi\\ ۰ & x>\pi\end{cases}$$

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تابع $f(x)=\begin{cases}x+\cos x & |x|<\pi\\ ۰ & |x|>\pi\end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $f(x)$ دارای انتگرال فوریه است و سپس انتگرال فوریه آن را بدست آورید.

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

با استفاده از نمایش انتگرال فوریه سینوسی، نشان دهید:

$$\int_۰^\infty \frac{w^۳\sin xw}{w^۴+۴}dw=\frac{\pi}{۲}e^{-x}\cos x \quad , \quad x>۰$$

Scanned by CamScanner

فصل ۳

پاسخ ۵۹

معادلات با مشتقات جزئی

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

مسئله زیر را به روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_{xx}+u_{yy}=0\ ;\ -\infty<x<\infty\quad,\quad 0<y<\pi$$

$$u(x,0)=\begin{cases}1\ , & |x|<\pi\\ 0\ , & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$u(x,\pi)=0\quad,\quad -\infty<x<\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}u(x,y)=\lim_{x\to\pm\infty}u_x(x,y)=0$$

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

مسئله روبرو را به روش جداپذیری متغیرها حل کنید.

$$u_t-u_{xx}=0\quad,\quad 0<x<\pi\quad,\quad t>0$$

$$u(x,0)=x\quad,\quad 0<x<\pi$$

$$u_x(0,t)=0\quad,\quad u_x(\pi,t)=0\quad,\quad t>0$$

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

معادلات مشتقات جزیی زیر را حل کنید.

الف)

$$u_{xx}+u_{yy}=2(x-1)\qquad(0<x<\pi\ ,\ 0<y<1)$$

$$\begin{cases}u(x,0)=x\\ u(x,1)=x-x^2\end{cases}\quad(0\le x\le\pi)\quad;\quad\begin{cases}u_x(0,y)=0\\ u_x(\pi,y)=0\end{cases}\quad(0\le y\le 1)$$

Scanned by CamScanner

$$u_t - 4u_{xx} = e^{-2x} \quad (0 < x < \infty \ , \ t > 0)$$

ب)

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \ , \quad u(0,t) = 0 \ , \quad \lim_{|x| \to \infty} u(x,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

با تبدیل فوریه سینوسی مسئله روبرو را حل کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 < x \leq x \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$x(x,0) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0 \ , \ u(0,t) = 0 \ , \ u(\infty,t) = 0$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

با تبدیل لاپلاس مسئله روبرو را حل کنید.

$$u_{tt} = 9u_{xx} \qquad 0 < x < +\infty$$

$$u(0,t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0 \ , u(x,0) = 0 \ , u_t(x,0) = 0$$

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

معادله زیر را به کمک روش جداپذیر طبق شرایط داده شده حل کنید.

$$u_{tt} = 4u_{xx} \ , \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ t \geq 0 \ , \ u_x(0,t) = 0 \ , \ u_x(1,t) = 0$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تغییر متغیر $U = x - 2y$ و $V = x - y$ حل کنید.

$$2u_x + u_y + 2(x-y)u = (x-y)(x-2y)$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

مسائل زیر را حل کنید.

الف)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , & 0 < x < \pi \ , \quad 0 < y < \pi \\ u_y(x,0) = 0 \ , & u_y(x,\pi) = 0 \ , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,y) = y \ , & u(\pi,y) = 1 - y \ , \quad 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \begin{cases} x - t & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases} \\ u(x,0) = e^{-|x|} \ , \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

با استفاده از تبدیل مناسب فوریه یا لاپلاس معادلات زیر را حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} u_t = ۲۵u_{xx} & x > ۰ \ , \ t > ۰ \\ u_x(۰,t) = ۰ \\ u(x,۰) = f(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

(راهنمایی: $F_c(f''(x)) = -\omega^۲ F_c(f(x)) - \sqrt{\frac{۲}{\pi}} f'(۰)$)

ب)
$$\begin{cases} ۴u_{tt} = u_{xx} & ۰ < x < ۱ \ , \ t > ۰ \\ u(۰,t) = \frac{۱}{۴}t^۲ \ , \ u_x(۰,t) = -۱ \\ u(x,۰) = x^۲ - x \ , \ u_t(x,۰) = ۰ \end{cases}$$

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

با روش جداسازی متغیرها، معادله $u_{xx} = u_{yy}$ را تحت شرایط زیر حل کنید.

$$u(۰,y) = u(۱,y) = ۰ \ , \ u_y(x,۰) = ۰ \ , \ u(x,۰) = ۳\sin(\pi x) \qquad ۰ \le x \le ۱ \ , \ y > ۰$$

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

معادله $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = ۰$ را با استفاده از تغییر متغیر $T = t$ و $z = x - t$ با شرط $u(x,۰) = x^۲$ حل کنید.

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

مسئله روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = xy \quad , \quad ۰ < x, y < \pi \\ u(x,۰) = x \quad , \quad u(x,\pi) = ۲\pi - x \quad , \quad ۰ \le x \le \pi \\ u(۰,y) = ۲y \ , \ u(\pi,y) = y + ۱ \quad , \quad ۰ \le y \le \pi \end{cases}$$

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

با تبدیل فوریه معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - ۹u_{xx} = ۰ \quad , \quad -\infty < x < +\infty \ , \ t > ۰ \\ u(x,۰) = ۴e^{-|x|} \quad , \quad u_t(x,۰) = ۰ \quad , \quad -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۱۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

مسئله زیر را به همگن تبدیل کنید. (حل مسئله همگن لازم نیست)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin x & (0 < x < \pi \ ,\ t > 0) \\ u(0,t) = 1 \ ,\ u(\pi,t) = 3 \ ,\ u(x,0) = \sin x \end{cases}$$

۱۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

مسئله زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$\begin{cases} 4u_{xx} = u_{tt} \ (0 < x < 1 \ ,\ t > 0) \\ u(0,t) = u(1,t) = u_t(x,0) = 0 \ ,\ u(x,0) = 3\sin 2\pi x \end{cases}$$

۱۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

معادله مقابل را حل نمایید.

$$u_{xx} = u_{tt} + t^2 - x^2 - t + x$$

$$u_x(0,t) = t \ ,\ u_x(1,t) = t^2 \ ,\ u(x,0) = 0 \ ,\ u_t(x,0) = -\frac{x^2}{2} \ ,\ 0 < x < 1 \ ,\ t > 0$$

۱۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

اگر $u = f(y+x) + g(y-x)$ جواب عمومی یک PDE باشد، معادله را پیدا کنید.

۱۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

با تبدیل فوریه معادله روبرو را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , & x > 0 \ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(x,0) = e^{-|x|} \ , & x > 0 \end{cases}$$

۱۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

ابتدا به کمک تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ معادله زیر را به یک معادله همگن تبدیل کرده و سپس جواب آن را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x \ , & 0 < x < \pi \ ,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \ , & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \ , & t \ge 0 \end{cases}$$

۲۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۸

معادله زیر را همگن کنید. (نیازی به حل معادله همگن شده نیست)

$$\begin{cases} 5 + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2x + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1 \ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = 5 \ , \quad u(1,t) = -2 \ , \quad u(x,0) = -\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

هریک از مسائل زیر را حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xt \\ u(x,0) = x+2 \ , \ u(0,t)=1 \ , \ u(1,t)=2 \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \ , \ 0<x<1 \ , \ 0<y<+\infty \\ u(x,0)=1 \ , \ u(0,y)=e^{-y} \ , \ u(1,y)=0 \end{cases}$$

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

مسئله‌های زیر را با استفاده از تبدیل مناسب حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x>0, y>0) \\ u_x(0,y) = 0 \ , \ u(x,0) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2} \ , \ |u(x,y)| < M \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \qquad (0<x<1, t>0) \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \ , \ u(x,0)=\sin \pi x \ , \ u_t(x,0) = -\sin \pi x \end{cases}$$

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

جواب معادله پتانسیل را روی حلقه داده شده به روش ضربی (جداسازی) به‌دست آورید.

$$u(r,0)=u(r,\pi)=u(2,\theta)=0 \ , \ u(1,\theta)=\sin\theta \ , \ 0<\theta<\pi \ , \ 1<r<2$$

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

مسئله‌های زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس یا فوریه حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} - \sin \pi x \sin \alpha t \ , \ 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

ب) $u_x(0,t)=0$; $u(x,0)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$; $u_t - u_{xx} = \begin{cases} 2t-1 & 0<x<\pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$

۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

معادله $(0<x<2, t>0)$ $4u_{xx} = u_{tt}$ را با شرایط مرزی زیر حل کنید.

$$u(0,t)=u(2,t)=0 \ ; \ u(x,0)=6\sin \pi x - 3\sin 4\pi x \ ; \ u_t(x,0)=0$$

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

هرگاه $u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} G_n(t)\sin nx$ که $t>0$ و $0 \le x \le \pi$ در معادله $u_t - u_{xx} = \frac{1}{2}xt$ صدق کند.
مطلوبست محاسبه $G_n(t)$ با شرط $u(x,0)=\sin 3x$.

Scanned by CamScanner

۲۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷–۱۳۸۶

معادله $x^2u_{xx} + xu_x + u_{yy} = 0$ را به روش جداپذیر حل کنید.

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷–۱۳۸۶

الف) با روش دلخواه مسئله زیر را حل کنید.

$$u_t = 4u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(x,0) = -\sin x \cos x \quad , \quad 0 \le x \le \pi$$

ب) با روش تبدیل لاپلاس مسئله زیر را حل کنید.

$$u_t = 1 + u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = t \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷–۱۳۸۶

به کمک تبدیل مناسب فوریه یا لاپلاس معادلات زیر را حل کنید.

الف) لاپلاس

$$\begin{cases} xu_x + u_t = xt & x > 0 \\ u(x,0) = u(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

ب) فوریه

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & x > 0 \\ u(x,0) = f(x) \;,\; u(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

۳۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷–۱۳۸۶

معادله زیر را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases} \quad , \quad t > 0 , 0 < x < 1$$

۳۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶–۱۳۸۵

مسئله مشتق جزئی زیر را با ذکر جزئیات به روش جداپذیری متغیرها حل کنید.

$$\frac{1}{4}u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 \;,\; 0 < x < \pi \;,\; t > 0$$

$$u(x,0) = x \;,\; u_t(x,0) = e^{-x} \;,\; u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \;,\; 0 < x < \pi \;,\; t \ge 0$$

۳۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶–۱۳۸۵

مسئله زیر را به روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_t - 4u_{xx} = te^{-t} \;,\; 0 < x < \infty \;,\; t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-x} \;,\; x \ge 0 \;,\; u(0,t) = 0 \;,\; t > 0 \;,\; \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = \lim_{x\to+\infty} u_x(x,t) = 0$$

Scanned by CamScanner

۳۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل فوریه یا لاپلاس حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} u_t = ۴u_{xx} & x > ۰ , t > ۰ \\ u_x(۰,t) = ۰ \ , \ u(x,۰) = e^{-۵x} \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} u_x + ۲xu_t = ۲x & x > ۰ , t > ۰ \\ u(x,۰) = u(۰,t) = ۱ \end{cases}$$

۳۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

جواب عمومی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی $u_{yx} + ۲xu_y = ۲x$ را بیابید.

۳۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

معادله دیفرانسیل زیر را به روش جداسازی متغیرها حل نمایید.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = ۰ & ۰ \le x \le \pi \ , \ ۰ \le y \le ۱ \\ u(x,۰) = u(x,۱) = u(۰,y) = ۰ \ , \ u(\pi,y) = ۳\sin(۵\pi y) \end{cases}$$

۳۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله روبرو را به روش تبدیل فوریه حل کنید. $u_t = u_{xx} + u \ , \ -\infty < x < \infty \ , \ t > ۰$

$$u(x,۰) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ -۱ & -۱ < x < ۰ \\ ۰ & \text{در بقیه جاها} \end{cases} \quad , \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = ۰$$

۳۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

مسئله دیفرانسیل جزئی زیر را به روش تفکیک پذیری متغیرها با جزئیات کامل حل کنید.

$$u_{tt} = u_{xx} \ , \ ۰ < x < \pi \ , \ t > ۰$$
$$u(۰,t) = u(\pi,t) = ۲ \ , \ u(x,۰) = x \ , \ u_t(x,۰) = ۰ \ , \ ۰ < x < \pi \ , \ t \ge ۰$$

۳۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

جواب معادله مقابل را بیابید.

$$u_{tt} = ۴u_{xx} \ , \ u(۰,t) = ۰ \ , \ u(\pi,t) = ۰$$
$$u(x,۰) = \sin ۵x + \sin ۴x \ , \ u_t(x,۰) = ۰$$

۳۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله زیر را به یک معادله همگن تبدیل کرده و سپس جواب آن‌را بیابید.

$$u_{xx} = u_t - x \quad , \quad u(۰,t) = ۰ \ , \ u(۱,t) = \frac{۵}{۶} \ , \ u(x,۰) = -\frac{x^۳}{۶}$$

۴۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

جواب عمومی $u_{xx} - ۲u_{xy} + u_{yy} = ۰$ را بیابید.

Scanned by CamScanner

۴۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله مقابل را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & 0 < x < 1 \;,\; t > 0 \\ u(0,t) = u(x,0) = 0 \;,\; u(1,t) = 1 - e^t \end{cases}$$

۴۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله گرمای روبرو را با شرایط داده شده حل کنید.

$$u_t = 9u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 3 \quad , \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \quad , \quad u(x,0) = \sin 4\pi x$$

۴۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

معادله اویلر زیر را با شرایط داده شده حل کنید.

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0 \quad , \quad u(x,0) = x^2 \quad , \quad u_y(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

۴۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

مسئله مقابل را به روش تبدیل فوریه حل کنید.

$$u_t - 9u_{xx} = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| < 1 \\ 0 & ; \quad \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad t > 0$$
$$u(x,0) = e^{-|x|} \;,\; -\infty < x < +\infty \;,\; \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0$$

۴۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

مسئله روبرو را حل کنید.

$$u_{tt} - u_{xx} = 2(t^2 - x^2) + 2x \;;\; 0 < x < 0/5, t > 0$$
$$u(x,0) = x^2 \;,\; u_t(x,0) = 0 \;;\; 0 \le x \le 0/5 \quad , \quad u_x(0,t) = t^2 - 1 \;,\; u_x(0/5,t) = -1 \;;\; t > 0$$

Scanned by CamScanner

فصل ۴

پاسخ ۹۷

توابع مختلط

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

الف) هر گاه $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد، نشان دهید: $u_x v_x + u_y v_y = 0$

ب) نشان دهید تابع $u=x^3-3xy^2$ همساز است. تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را طوری بیابید که $f(0)=2i$.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) پارامترهای a و b را چنان بیابید که $u=\sin ax \cosh by$ یک تابع همساز (یا توافقی) گردد.

ب) v مزدوج همساز (یا توافقی) u را به‌دست آورید و سپس $f=u+iv$ را بر حسب z بنویسید.

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

در تحلیلی بودن تابع $f(x)=x+i|y|$ در صفحه مختلط بحث کنید.

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

مقادیر b,a را طوری تعیین کنید که $u(x,y)=x^2-ay^2+e^{2x}\cos by$ همساز شود. مزدوج همساز آن v را به‌دست آورید و تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را بر حسب z بنویسید.

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

هرگاه $u(r,\theta)=\theta+r^2\cos(\theta)$ ، قسمت حقیقی تابع $f(z)$ باشد، آنگاه $f'(1+i)$ را بیابید.

Scanned by CamScanner

(ویژه دانشگاههای آزاد اسلامی استان تهران)

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

نقاط تحلیلی و غیر تحلیلی تابع $f(z)=\frac{|z-1|^2}{z-1}+|x|+iy$ را به دست آورید.

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

فرض کنید $u=\sin x\cosh(y)$.

الف) v مزدوج همساز (یا توافقی) u را به‌دست آورید.

ب) تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را برحسب z بنویسید.

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

نقاط منفرد تابع $f(z)=\frac{2z+\pi i}{z^2(e^z+i)}$ و انواع آنها را تعیین کنید.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

نشان دهید تابع $u(x,y)=2x-e^x\sin y$ همساز (هارمونیک) است و مزدوج همساز آن $v(x,y)$ را بیابید. اگر $f(z)=u+iv$، ضابطه f را بر حسب z تعیین کنید.

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

الف) تعیین کنید تحت چه شرایطی $u=\cos ax\cosh by$ یک تابع همساز (یا توافقی) است؟

ب) v مزدوج همساز (یا توافقی) u را به‌دست آورید.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

پیوستگی، مشتق‌پذیری و روابط کشی ریمان را در مبدأ برای تابع روبرو بررسی نمایید.

$$f(z)=\begin{cases}\frac{(\bar{z})^3}{z^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

برای تابع مختلط $f(z)=e^z$، نشان دهید $f'(z)=e^z$.

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

همه ریشه های معادله $\cos z=2$ را پیدا کنید.

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

معادله $z^5=1$ را حل کنید.

Scanned by CamScanner

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

مدول و آرگومان عدد مختلط $z=(\sqrt{۳}-i)^{۶}$ را تعیین کنید.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

نشان دهید تابع $u(x,y)=e^{x}(x\sin y+y\cos y)$ همساز است. سپس تابع تحلیلی $f(z)$ را بیابید به قسمی که $u(x,y)=\operatorname{Re}[f(z)]$. آنگاه $f(z)$ را برحسب متغیر z بیان کنید.

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

آیا توابع زیر همسازند؟ در صورت همساز بودن، توابع مزدوج همساز آن‌ها را بیابید.

الف) $u(x,y)=e^{x}\cos y$

ب) $u(x,y)=x^{۲}-y^{۲}-۲x+۳y$

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

مشتق تابع $f(z)=(۱+i)(x+y)^{۲}$ را در صورت وجود بیابید. آیا این تابع جایی در صفحه مختلط تحلیلی است؟

۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

مقدار هریک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{۱-i\sqrt{۳}}$

ب) $\sqrt[۳]{۱+i}$

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

اگر $u(x,y)=y-x+e^{x}\sin y$، قسمت حقیقی تحلیلی $f(z)$ باشد، مطلوب است محاسبه مقدار $f'(-\pi i)$.

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

اگر $z=x+iy$، آنگاه توابع $f(z)=e^{x-iy}$ و $g(z)=e^{-y+ix}$ هر یک در کدام نقاط صفحه نسبت به متغیر مختلط z مشتق‌پذیر هستند؟ این توابع را بر حسب z بنویسید.

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

ابتدا همساز بودن تابع $u(x,y)=\ln|z|$ را بررسی کرده و سپس γ، مزدوج همساز آن را یافته و تابع $f(z)=u+i\gamma$ را برحسب z بیان کنید.

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

هرگاه $f(z)=u+iv$ در ناحیه D تحلیلی باشد، آن‌گاه به ازای چه عدد حقیقی k، تساوی زیر به ازای هر z واقع در D برقرار است؟

$$\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\right)|f(z)|^{۲}=k|f'(z)|^{۲}$$

Scanned by CamScanner

(ویژه دانشگاههای آزاد اسلامی استان تهران)

۲۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

در تحلیلی بودن $f(z)=\cos(x+y)+i\cos(x-y)$ در صفحه مختلط بحث کنید.

۲۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

a و b را طوری بیابید که تابع $u(x,y)=x^2-ay^2+e^{2x}\cos by$ همساز شود. v مزدوج همساز آن را بیابید و تابع تحلیلی $w=f(z)=u+iv$ را برحسب z بنویسید.

۲۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

اگر $f(z)=u+iv$ تابعی تحلیلی باشد و $u=3x^2y-y^3$، ضابطه $f(z)$ را تعیین کنید و $f'(i-1)$ را بیابید.

۲۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نشان دهید که هرگاه تابع $f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد و $\operatorname{Arg}(f(z))$ (آرگومان $f(z)$) ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ یک تابع ثابت است.

۲۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

نشان دهید که تابع $u(x,y)=xe^{-y}\cos x-ye^{-y}\sin x$ همساز است و سپس مزدوج همساز آن را به دست آورید.

۲۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2+2y^3$ هارمونیک (همساز) باشد. سپس یک تابع تحلیلی f بیابید که u قسمت موهومی آن باشد.

۳۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

نقاط تحلیلی و غیرتحلیلی تابع $f(z)=\dfrac{\ln(z^2+1)}{(2z-i)^2}$ را بیابید.

۳۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)=\ln z+\dfrac{|z-1|^2}{\bar{z}-1}$ را بیابید و نقاط تکین تنهای f را مشخص کنید.

Scanned by CamScanner

فصل ۵

پاسخ ۱۱۱

انتگرال‌های مختلط

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z|=2} \left(z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{z}{e^z - z}\right)dz$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}dx$

ج) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{2+\cos(\theta)}d\theta$

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos 2\theta}{5-4\sin\theta}\right)d\theta$

ب) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)}dx$

ج) $\oint_{|z|=2} \left(\frac{\cosh z}{z(e^z-1)} + (1-z)^4 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) + (3z+2)^2 e^z\right)dz$

Scanned by CamScanner

۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

ب) $\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+3}d\theta$

۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

مطلوب است محاسبه $\int_c(\cos 3z+\bar{z})dz$ که c منحنی $y=x^2$ از $x=0$ تا $x=2$ می‌باشد.

۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

سری لوران تابع $f(z)=\frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ را در دامنه همگرائی $1<|z|\le 2$ حول $z=0$ به‌دست آورید.

۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) هرگاه c خط واصل بین دو نقطه $A(0,0)$ و $B(3,-1)$ باشد، مطلوب است $\int_c(xy-2i)dz$.

ب) هرگاه $c:|z|=\frac{3}{2}$ باشد، مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_c\frac{e^z dz}{(z-3)(z+1)^2}$.

ج) مطلوب است محاسبه انتگرال‌های حقیقی مقدار زیر با استفاده از مختلط.

۱) $\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx$

۲) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos\theta+3}$

۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=3}\frac{z}{(z+i)^2(z-1)}dz$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

ج) $\oint_{|z|=1}(e^{2z}\sin 3z+z^2e^{\frac{1}{z}}+\operatorname{Im}z)dz$

Scanned by CamScanner

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) معادله زیر را حل نموده و ضابطه $f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = \begin{cases} 1-\omega & 0\le\omega\le 1 \\ 0 & \omega>1 \end{cases}$$

ب) به ازای ωای مناسب نتیجه بگیرید $\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}-e^{z+1}}{(z-1)^3}dz$

ب) (AB پارخط واصل بین $A\big|_1^0$ و $B\big|_0^1$ است.) $\int_{AB}\bar{z}dz$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$

د) $\oint_{|z|=1}\sin^2(\frac{1}{z})dz$

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

سری لوران تابع $f(z)=\frac{z+2}{(z-1)^4(z+3)}$ را در دامنه همگرایی $0<|z-1|<4$ بیابید.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{c:|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{z}}$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$

ج) $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}dz$

Scanned by CamScanner

ب) $\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x dx}{(x^2-4x+5)^2}$

۱۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3-2\cos\theta}d\theta$

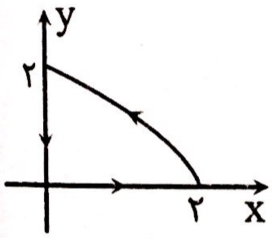
ب) $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

ج) $\oint_{|z|=1}\left(\frac{1}{z(e^z-1)}+z^3\cosh(\frac{1}{z})+(3z-1)^2\sin z\right)dz$

۱۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

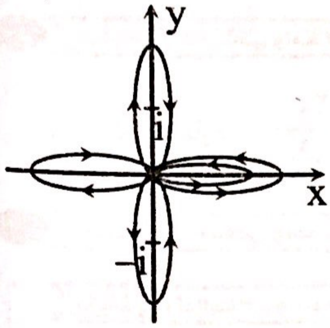
حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) مطلوب است حاصل انتگرال زیر روی مسیر نشان داده شده روبرو.



$$\oint \frac{1}{z}\cos(\frac{1}{z-1})dz$$

ب)مطلوب است حاصل انتگرال زیر که در آن c به صورت روبرو نشان داده شده است.



$$\oint_c \frac{dz}{z^4-1}$$

۱۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{2\pi}{e^3}$$

۱۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$\int_C (z^3+\sin z)dz$ را که در آن C بخشی از سهمی $x=t\ ,\ y=t^2$ برای $0\le t\le 1$ است، محاسبه کنید.

۱۷) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

با یافتن سری لوران تابع $f(z)=\sin(\frac{1}{z})-\cos(\frac{1}{z})$ حول $z=0$ نوع نقطه تکین آن را مشخص کنید.

۱۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

هریک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\int_c \frac{1}{z^2}dz\ ,\quad c: 4x^2+9y^2=36$

Scanned by CamScanner

ب) $\int_{|z|=1} z^{2}e^{\frac{1}{z}}dz$

ج) $\oint_{|z|=2} \frac{z^{2}+1}{z(z+1)}dz$

د) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$

ه) $\int_{c} \frac{2}{z}dz \ , \ c: y=x^{2} \ , \ 0<x<1$

۱۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{x^{4}+5x^{2}+4}$

ج) $\oint_{|z|=1} (\frac{\overline{z}}{z}+z^{2}e^{\frac{1}{z}}+\cos z)dz$

۲۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

اگر $x>0$ ثابت کنید:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^{2}}dw = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

۲۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=3} (\frac{1}{z-1}.\cos\frac{1}{z}+\frac{\overline{z}}{z})dz$

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^{2}+1)^{2}}dx$

ج) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^{2}\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$

۲۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۸

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x dx}{(x^{2}+3)(x^{2}+1)}$

ب) $\oint_{|z|=5} \frac{z}{z+2}\sin\frac{1}{z}dz$

ج) $\oint_{c} (\overline{z})^{2}dz$ c: مثلث با رئوس $(-1, i, 1)$ می‌باشد.

Scanned by CamScanner

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

اگر c دایره $z=e^{i\theta}$ باشد که از نقطه $\theta=-\pi$ تا $\theta=\pi$ پیموده شود، ثابت کنید: $\oint_c (\frac{e^{iz}}{z})dz = ۲\pi i$

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

هریک از انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z|=۲} \frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}dz$

ب) $\int_۰^\pi \frac{d\theta}{۱+\sin^۲\theta}$

۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_c (|z|^۲+z^۲)dz$ ، c دایره $|z|=۲$ از $(۲,۰)$ تا $(۰,۲)$.

ب) فرض کنید c بیضی $\frac{(x+۴)^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد و $f(w)=\int_c \frac{z^۲-z+۱}{z(z-w)}dz$.

در این صورت $f'(۵)$ را تعیین کنید.

ج) $\int_{|z|=۱} (۱-\cos z)e^{\frac{۱}{z}}dz$

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

الف) بسط لوران $f(z)=\frac{z}{(z-۱)(۲-z)}$ را در ناحیه $|z|>۲$ تعیین کنید.

ب) قطب‌ها و مانده‌های متناظر با قطب در توابع زیر را تعیین کنید.

(۱) $f(z)=\frac{\sin z}{z^۲(z^۲+۴)}$

(۲) $g(z)=(z-۳)\sin(\frac{۱}{z+۲})$

۲۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

هر یک از انتگرالهای زیر را حل کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۳x}{x^۲+۱}dx$

ب) $\oint_{|z|=۲} \frac{ze^{\frac{۱}{z}}}{(z-۱)^۲}dz$

Scanned by CamScanner

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=1} \left(\frac{\tan z}{z}+\frac{\bar{z}}{|z|}\right)dz$

ب) $\oint_{|z|=1} \sin^2 \frac{1}{z} dz$

ج) $\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta} d\theta$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

بسط لوران تابع $f(z)=\frac{z-5}{z^2+2z-3}$ حول صفر در ناحیه $|z|<1$ را بیابید.

۳۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z}{(z-1)^{100}} dz$

ب) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^2+\frac{1}{z^2}}}{z^2} dz$

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx$

۳۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ را در نقطهٔ $z_0=-i$ به دست آورید.

۳۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1} dx$

ب) $\oint_C \left(\frac{2z+\pi i}{e^{2z}+1}+\frac{z^2}{\sin z}\right)dz \quad , \quad C:|z|=2$

ج) $\oint_C \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)dz \quad , \quad C:|z|=\frac{3}{2}$

د) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} d\theta$

Scanned by CamScanner

۳۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

حاصل انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_c \frac{e^z \sin z}{z^2+1} dz$ که c دایره $|z|=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

ب) $\int_c \frac{z^2}{z^2+1} dz$ روی $c: |z+i|=\frac{1}{2}$

۳۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

اگر $a>b>0$ و m عددی ثابت باشد، نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(mx)dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{a^2-b^2}(a^2 e^{-ma} - b^2 e^{-mb})$$

۳۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

بسط لوران تابع $f(z)=\frac{2\cos z+z^2-3}{z^5}$ را حول نقطه $z=0$ را به‌دست آورید و سپس مقدار $\oint_{|z|=1} f(z)dz$ را حساب کنید.

۳۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را حل کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2} dx$

ب) $\oint_{|z|=2} \left(\frac{1-z^2}{1-z}\cos z + \frac{1}{z(e^z-1)}\right)dz$

ج) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z} dz$

۳۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

بسط لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-z^3}$ را حول نقطه $z_0=1$ بیابید.

۳۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

انتگرالهای زیر را حل کنید.

الف) $\oint_{|z|=1} \frac{\tanh^2(z+\frac{1}{2})dz}{e^z.\sin z}$

Scanned by CamScanner

ب) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{۱+\sin\theta}{۳+\cos\theta} d\theta$

ج) $\int_{-\infty}^{۰} \frac{\sin ۲x dx}{x^{۲}+x+۱}$

د) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^{۲}-۲x+۲)^{۲}}$

۳۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران تابع $f(z)=e^{z}(z-۱)^{-۲}$ را حول $z=i$ بدست آورید.

۴۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران $f(z)=\frac{۱}{(z-۱)(z-۳)}$ را در بازه $۲<|z|<۳$ بدست آورید.

۴۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

سری لوران تابع $f(z)=\frac{-۲z+۳}{z^{۲}-۳z+۲}$ حول صفر همگرا در $۱<|z|<۳$ را بیابید.

۴۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

انتگرالهای زیر را بدست آورید.

الف) $\int_{|z|=۱} e^{\frac{۱}{z}} \sin(\frac{۱}{z}) dz$

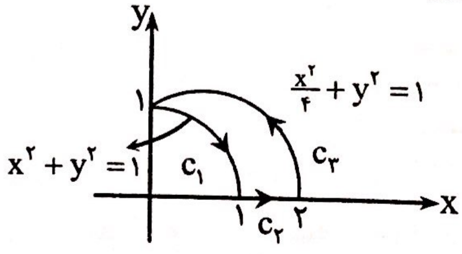
ب) $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta+۴}$

ج) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{۲}\cos ۲x}{(x^{۲}+۴)^{۲}} dx$

د) $\int_{c} ((\bar{z})^{۲}+|z|) dz \ , \ c: x^{۲}+y^{۲}=۱ \ , \ y\geq ۰$

۴۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

مطلوب است محاسبه $\oint_{c} \bar{z} dz$ که c منحنی ساده و بسته در شکل روبرو است.



۴۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

انتگرالهای زیر را حل کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{۲} x}{۱+x^{۲}} dx$

Scanned by CamScanner

ب) $\oint_{|z|=1} \left(\frac{\sinh z}{z^2(2-z)} + \frac{\cos z}{(\sin z)(e^z-1)}\right)dz$

۴۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}dz$ (a عدد حقیقی ثابت) را بیابید. سپس به کمک آن مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta$$

۴۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

انتگرال‌های زیر را بیابید.

الف) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$

ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$

۴۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

سری لوران تابع $f(z) = \frac{1-e^{-\frac{1}{z}}}{z+2}$ را حول $z=0$ بیابید و سپس $\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)$ (مانده حول ۲-) را بیابید.

فصل ۶

نگاشت

پاسخ ۱۴۹

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

الف) نگاشت موبیوسی بیابید که $(-1,+1,0) \to (0,+\infty,i)$.

ب) تصویر خط $y = 1 + x$ را تحت نگاشت $w = z^2$ بیابید.

ج) تصویر ناحیه $D = \{(x,y), x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

تصویر ناحیه $D = \{(x,y) | \frac{-1}{2} < x \ , \ y \leq 0\}$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-1+i}{z+1+i}$ بیابید.

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

تصویر ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = -x$ ، $y = x$ و $x = 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

تصویر ناحیه $1 \leq (x-1)^2 + y^2$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ بیابید.

Scanned by CamScanner

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

نقش ناحیه $D=\{(x,y)|x\geq ۱,\ y\geq ۱\}$ را تحت نگاشت $w=i\dfrac{z-۱}{z+۱}$ بیابید.

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

تصویر ناحیه مربعی $D=\{(x,y)\,|\,۵<x\leq \dfrac{۱}{۲}, y\leq ۰\}$ را تحت نگاشت $w=\dfrac{i}{z-۱}$ بیابید.

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

تصویر ناحیه $R=\{x+iy:۲x+۱\geq ۰, y\geq ۰\}$ را تحت نگاشت $w=\dfrac{iz}{z+۱}$ بیابید.

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

تصویر ناحیه مربعی $D=\{(x,\ y)\,|\,-۱\leq x\leq \dfrac{-۱}{۲}\ ,\ ۱\leq y\leq \dfrac{۳}{۲}\}$، را تحت نگاشت $w=\dfrac{۱}{z+۱-i}$ بیابید.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

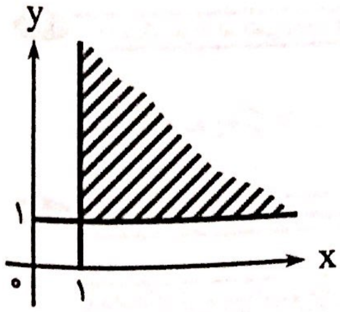
نشان دهید $w=\sin z$ خط $x=c$, $(۰<c<\dfrac{\pi}{۲})$ را به‌طور یک‌به‌یک به روی شاخه سمت راست یک هذلولی می‌نگارد.

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

نقش ناحیه محصور بین خطوط $y=\pm x$ و $y=-۲$ را تحت نگاشت $w=\dfrac{۱}{z}$ مشخص کرده و رسم کنید.

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

نقش ناحیه روبرو را تحت نگاشت $w=i\dfrac{z-۱}{z+۱}$ به‌دست آورید.



۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

تصویر ناحیه $D=\{z\,|\,۰<\operatorname{Re}z\leq ۱\}$ را به کمک نگاشت $w=\dfrac{iz}{z-۱}$ تعیین کنید.

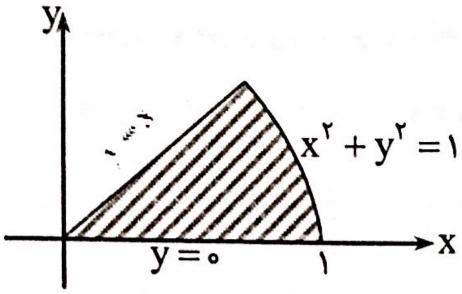
۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

اثر نگاشت $w=e^z$ را در مجموعه $\mathbb{C}$ روی خطوط $y=k$ و $x=k$، (k ثابت غیر صفر)بررسی کنید.

Scanned by CamScanner

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

تصویر ناحیه مقابل را تحت نگاشت $w=\dfrac{z^{۸}-i}{z^{۸}+i}$ بیابید.



۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

نشان دهید که با تبدیل $w=\dfrac{z-۲}{z}$ قرص $|z-۱|<۱$ به روی نیم‌صفحه $x<۰$ نگاشته می‌شود.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل دو خطی (موبیوس) بیابید که نقاط $z_۱=-i$ و $z_۲=۰$ و $z_۳=i$ را به ترتیب بر نقاط $w_۱=-۱$ و $w_۲=i$ و $w_۳=۱$ بنگارد. تصویر نقاط خارج دایره $|z-۱|=۱$ را توسط تبدیل فوق به دست آورید.

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تصویر ناحیه $R=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\,|\,۰<\operatorname{Im}z<\pi\}$ را تحت نگاشت $w=f(z)=\dfrac{e^{z}-i}{e^{z}+i}$ بیابید.

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

الف) نقش معادله $x^{۲}-y^{۲}=۱$ را با تبدیل $w=\dfrac{۱}{z}$ تعیین کنید.

ب) تصویر ناحیه $|z-۱|\leq ۱$ را توسط نگاشت $w=\dfrac{z+۱}{z+i}$ بیابید.

۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه محصور بین دو خط $x=۰$ و $x=۱$ را تحت نگاشت $w=\dfrac{i}{z+۱}$ یافته و آن را رسم کنید.

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

تصویر منحنی $y=x^{۲}$ را تحت نگاشت $w=z^{۲}$ بیابید.

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $R=\{z=x+iy\,;\,-۱<x<۲\,,\,۰\leq y\leq ۱\}$ را تحت نگاشت $w=z^{۲}$ تعیین کنید.

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $|z-۱|<۱$ را توسط نگاشت $w=\dfrac{z+۱}{z+i}$ بدست آورید.

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصاویر نواحی زیر را به ترتیب تحت نگاشت‌های داده شده، بیابید.

الف) $A=\{(x,y); x^2+y^2\leq 1\ ,\ y\geq 0\}$ تحت $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z+1}$

ب) $\operatorname{Im} z\geq 0$ تحت $f(z)=\dfrac{i-z}{i+z}$

ج) $A=\{(x,y); 1\leq x\leq 2,\ 1\leq y\leq 2\}$ تحت $f(z)=z^2$

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تصویر ناحیه $R=\{x+2y \mid x^2+(y-1)^2\leq 1\}$ را تحت نگاشت $f(z)=\ln(z-i)+1$ بیابید.

۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

نگاشتی بیابید که نقاط $z_1=0$ و $z_2=1$ و $z_3=+\infty$ را به ترتیب روی نقاط $w_1=0$ و $w_2=+\infty$ و $w_3=1$ تصویر کند. تصویر ناحیه $D=\{(x,y) \mid x>0\ ,\ y>0\}$ را تحت نگاشت فوق بیابید.

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

تصویر ناحیه روبرو را تحت نگاشت $f(z)=(1-i)e^{-z}$ بیابید. $R=\{(x,y) \mid x\leq 0\quad ,\quad 0\leq y\leq \frac{\pi}{2}\}$

Scanned by CamScanner

پاسخِ فصل ۱

سری فوریه

پرسش ۷

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۱

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

چون تابع زوج است، b_n ها صفرند.

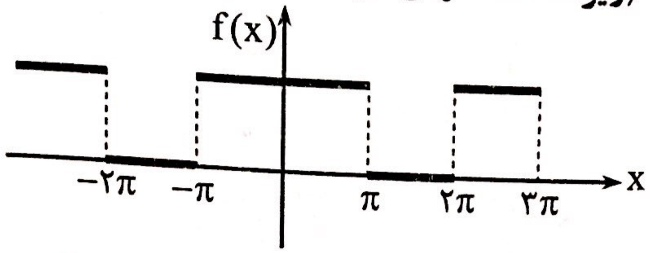
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ , \ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 1$$

$$n \geq 1 \rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\sin nx \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{2}{(4k+1)\pi} & n = 4k+1 \\ \frac{-2}{(4k+3)\pi} & n = 4k+3 \end{cases}$$

$f(x)$ سری فوریه: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\cos((4k+1)x) - \frac{2}{(4k+3)\pi}\cos((4k+3)x)\right)$$

Scanned by CamScanner



$$f(0)=1\Rightarrow \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots)=\frac{1}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4}$$

۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

در تابع $f(x)$ رابطه $f(-x)=-f(x)$ برقرار است یعنی تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد و این یعنی تابع $f(x)$ فرد است و در تعیین سری فوریه نظیر آن در بازه $(-\pi,\pi)$ ضریب فوریه کسینوسی یعنی $a_0=0$, $a_n=0$.

مشتق	انتگرال
$\pi-x$	$\sin nx$
-1	$\frac{-1}{n}\cos nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\sin nx$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-(\pi-x)}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$$

به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $f(\frac{\pi}{2})=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}\to \pi-\frac{\pi}{2}=2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots)\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots=\frac{\pi}{4}$

۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

$f(x)$ زوج است پس: $f(x)=|x|\,,\ -1<x<1\,,\ \ell=\frac{T}{2}=1$

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx=2\int_0^1 xdx=1$$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)dx=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx=2\left(\frac{x\sin(n\pi x)}{n\pi}+\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ فرد}\\ \text{صفر} & n \text{ زوج}\end{cases}\qquad b_n=0$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x=|x|\xrightarrow{x=0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Scanned by CamScanner

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

تابع $f(x)$ در بازه $-\pi<x<\pi$ یک تابع زوج هست لذا ضریب b_n برای این سری برابر صفر می‌گردد.

$$a_0=\frac{1}{4L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3\pi}(\pi^3)=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}[\underbrace{\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{\text{صفر}}+\frac{2x}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\underbrace{\frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{\text{صفر}}]=\frac{2}{\pi}(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi)=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{L})+bn\sin(\frac{n\pi x}{L}))=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{\pi}}{n^2}\cos nx=x^2$$

$-\pi\le x\le\pi$

$$x^2-\frac{\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{\pi}}{n^2}\cos nx\xrightarrow{\int}\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx+k_1$$

k_1: مقدار متوسط $(\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x)$ در بازه $-\pi<x<\pi$ که چون تابع فرد است برابر صفر می‌شود.

$$\xrightarrow{\int}\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^2x^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n^4}\cos nx+k_1$$

$$k_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^2x^2}{6})dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^2x^2}{6})dx=\frac{1}{\pi}(\frac{x^5}{60}-\frac{\pi^2x^3}{18}\Big|_0^{\pi})$$

$$=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi^5}{60}-\frac{\pi^5}{18})=\frac{1}{\pi}(-\frac{42\pi^5}{18\times60})=-\frac{42\pi^4}{18\times60}=-\frac{7\pi^4}{180}$$

$$\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^2x^2}{6}=\frac{-7\pi^4}{180}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^n}{n^4}\text{cosnx}\to x=\pi$$

$$\frac{\pi^4}{12}-\frac{\pi^4}{6}=\frac{-7\pi^4}{180}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4(-1)^{2n}}{n^4}\Rightarrow\frac{-\pi^4}{12}=\frac{-7\pi^4}{180}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow\frac{7\pi^4}{180}-\frac{\pi^4}{12}=-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Rightarrow\frac{-8\pi^4}{180\times(-4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4\sin\frac{x}{2}}{\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

Scanned by CamScanner

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\cos\frac{x}{۲}\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_۰^{\pi}(\cos(n+\frac{۱}{۲})x+\cos(n-\frac{۱}{۲})x)dx$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})x}{n+\frac{۱}{۲}}+\frac{\sin(n-\frac{۱}{۲})x}{n-\frac{۱}{۲}}\right)\Bigg|_۰^{\pi}=\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{\pi(۴n^۲-۱)}\ ,\ b_n=۰$$

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{\pi(۴n^۲-۱)}\cos(nx)=\cos\frac{x}{۲}$$

اگر قرار دهیم $x=\pi$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{x}{۲}\Big|_{x=\pi}=\cos\frac{\pi}{۲}=۰\\ \cos(nx)\Big|_{x=\pi}=(-۱)^n\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۴n^۲-۱}=\frac{۱}{۲}$$

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف)

$$a_۰=\frac{۱}{۸}\int_{-۴}^{۴}V(t)dt=\frac{۱}{۸}\int_۰^{۴}۱۰dt=۵\quad,\quad a_n=۰$$

$$b_n=\frac{۱}{۴}\int_۰^{۴}۱۰\sin\frac{n\pi t}{۴}dt=\frac{۵}{۲}\frac{۴}{n\pi}(-\cos\frac{n\pi t}{۴})\Big]_۰^{۴}=\frac{۱۰}{n\pi}(-(-۱)^n+۱)$$

$$V(t)=۵+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱۰}{n\pi}(۱-(-۱)^n)\sin\frac{n\pi t}{۴}$$

ب)

$$S_۱(t)=۵+\frac{۲۰}{\pi}\sin\frac{\pi t}{۴}$$

$$S_۲(t)=۵+\frac{۲۰}{\pi}\sin\frac{\pi t}{۴}+\frac{۲۰}{۳\pi}\sin\frac{۳\pi t}{۴}$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

$f(x)=x^۲\rightarrow$ یک تابع زوج $\rightarrow a_۰,a_n,b_n=۰$

$$\rightarrow a_۰=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۲dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}x^۲dx=\frac{۲}{\pi}(\frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^{\pi})=\frac{۲}{۳\pi}.\pi^۳=\frac{۲}{۳}\pi^۲$$

$$\rightarrow a_n=\frac{۱}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^۲\cos nx dx=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}x^۲\cos nx dx$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{x^۲}{n}\sin nx\Big|_۰^{\pi}+\frac{۲x}{n^۲}\cos nx\Big|_۰^{\pi}-\frac{۲}{n^۳}\sin nx\Big|_۰^{\pi}\right]=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{۲\pi}{n^۲}(-۱)^n\right]=\frac{۴}{n^۲}(-۱)^n$$

$$\rightarrow f(x)=x^۲=\frac{\pi^۲}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^n}{n^۲}\cos nx$$

Scanned by CamScanner

$$f(x)=x^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n}}{n^{۲}}\cos nx \xrightarrow{\times(-۱)} -x^{۲}=-\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}}\cos nx$$

$$\xrightarrow{x=۰} ۰=-\frac{\pi^{۲}}{۳}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}} \rightarrow \frac{\pi^{۲}}{۳}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۴(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}} \rightarrow \frac{\pi^{۲}}{۱۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}}$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

$f(x)$ تابعی زوج است پس $b_n=۰$

$$a_{۰}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{۲}dx=\frac{۱}{\pi}\left[\sin\frac{x}{۲}\right]_{۰}^{\pi}=\frac{۲}{\pi}$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos\frac{x}{۲}\cos nx dx=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos(n+\frac{۱}{۲})x+\cos(n-\frac{۱}{۲})x dx$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left[\frac{\sin(n+\frac{۱}{۲})\pi}{n+\frac{۱}{۲}}+\frac{\sin(n-\frac{۱}{۲})\pi}{n-\frac{۱}{۲}}\right]=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n+\frac{۱}{۲}}-\frac{\cos n\pi}{n-\frac{۱}{۲}}\right)=\frac{(-۱)^{n+۱}}{\pi(n^{۲}-\frac{۱}{۴})}$$

$$f(x)=\cos\frac{x}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\pi(n^{۲}-\frac{۱}{۴})}\cos nx$$

به ازای $x=\pi$ داریم:

$$۰=\frac{۲}{\pi}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\pi(n^{۲}-\frac{۱}{۴})} \rightarrow \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}-\frac{۱}{۴}}=۲$$

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

الف)

$$f(x)=x\sin x=\frac{a_{۰}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$a_{۰}=\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x dx=\frac{۱}{\pi}(\sin x-x\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{۱}{\pi}(-۲\pi\cos\pi)=۲$$

$$a_n=\frac{۱}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cos nxdx=\frac{۱}{\pi}\int\frac{x}{۲}(\sin(۱-n)x+\sin(۱+n))xdx$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left(\frac{\sin(۱-n)x}{(۱-n)^{۲}}-\frac{x\cos(۱-n)x}{۱-n}+\frac{\sin(۱+n)x}{(۱+n)^{۲}}-\frac{x\cos(۱+n)x}{۱+n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=(-۱)^{n}\left(\frac{۱}{۱+n}-\frac{۱}{۱-n}\right)$$

$$b_n=\frac{۱}{l}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\sin xdxdx=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{۲}(\cos(۱-n)x-\cos(۱+n)x)dx=۰$$

$$f(x)=۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n-۱}\right)\cos nx$$

پس:

ب) انتگرال‌گیری از طرفین:

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1+n+1}{n^2-1}\right)\cos nx=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\right)\cos nx$$

$$f(x)-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\cos nx\xrightarrow{s}\int_0^x(u\sin u-1)du=k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\frac{1}{n}\sin nx$$

$$\left.\begin{array}{l}-x\cos x+\sin x-x=k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2-1}\sin nx\\ k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\underbrace{-x\cos x}_{\text{فرد}}+\underbrace{\sin x}_{\text{فرد}}-\underbrace{x}_{\text{فرد}})dx=\frac{1}{2\pi}(0)\to k=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -x\cos x+\sin x-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$$

$$x=\frac{\pi}{2}\to\frac{1-\frac{\pi}{2}}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\Rightarrow\frac{1-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{+1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{48}-\dots$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{1}{48}-\dots\Rightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{48}+\dots$$

$$\to\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}-\frac{1}{48}+\dots=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}$$

۱۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

ابتدا در حالت خاص فرض می‌کنیم دوره تناوب $f(x)$، 2π باشد. بنابراین:

برای هر $p\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{cases}f(x)\cos px=A_0\cos px+\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\cos px\\ f(x)\sin px=A_0\sin px+\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\sin px\end{cases}$$

از طرفین هر تساوی نسبت به x روی بازه $(0,2\pi)$ انتگرال می‌گیریم. این انتگرال از $\sum$ عبور می‌کند زیرا $\sum$ روی n گرفته شده است.

$$\begin{cases}\int_0^{2\pi}f(x)\cos px\,dx=A_0\int_0^{2\pi}\cos px\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos px\,dx+B_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos px\,dx]\\ \int_0^{2\pi}f(x)\sin px\,dx=A_0\int_0^{2\pi}\sin px\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\int_0^{2\pi}\cos nx\sin px\,dx+B_n\int_0^{2\pi}\sin nx\sin px\,dx]\end{cases}$$

به این ترتیب برای $n\neq 0$ و $p\neq 0$ با محاسبه داریم:

$$\int_0^{2\pi}\cos nt\cos pt\,dt=\begin{cases}0\to n\neq p\\ \pi\to n=p\end{cases}\quad,\quad\int_0^{2\pi}\sin nt\sin pt\,dt=\begin{cases}0\to n\neq p\\ \pi\to n=p\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\int_0^{2\pi} \sin nt \cos pt\,dt = 0$$

بنابراین با انتخاب $n=p$ داریم:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \pi A_n \\ \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \pi B_n \end{cases}$$

A_0 نیز با محاسبه $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ و با فرض این که می‌توان از طرف دوم رابطه اصلی جمله به جمله انتگرال گرفت به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \,,\ A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \,,\ B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

حال از آنجا که $f(x)$ یک سری مثلثاتی متناوب با دوره تناوب 2π است، توابع $f(x)\cos nx$ و $f(x)\sin nx$ نیز چنین خواهد بود. پس حدود انتگرال‌ها را می‌توان به $[\alpha, \alpha+2\pi]$ که α هر عدد حقیقی دلخواه می‌تواند باشد تغییر داد. این موضوع را برای A_n اثبات می‌کنیم:

داشتیم $\pi A_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$. پس:

$$\pi A_n = \int_0^{\alpha} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\cos nx\,dx + \int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

با تغییر متغیر $x = u + 2\pi$ در انتگرال سوم داریم:

$$\int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{\alpha}^{0} f(u+2\pi)\cos(nu+2n\pi)du = \int_{\alpha}^{0} f(u)\cos(nu)du$$

بنابراین:

$$\int_{\alpha+2\pi}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -\int_0^{\alpha} f(u)\cos(nu)du = -\int_0^{\alpha} f(x)\cos nx\,dx$$

و با جایگذاری حکم ثابت می شود. در حالت کلی $f(x)$ متناوب با دوره تناوب L باشد، تغییر متغیر

$$x = \frac{Lu}{2\pi} \rightarrow g(u) = f\left(\frac{Lu}{2\pi}\right)$$

می‌دهیم:

$g(u)$ تابعی است متناوب با دوره تناوب 2π. زیرا

$$g(u+2\pi) = f\left(\frac{L}{2\pi}(u+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{2\pi}u + L\right) = f(x+L) = f(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}u\right) = g(u)$$

حال ضرایب سری فوریه را با $g(u)$ می‌نویسیم:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} g(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f\left(\frac{L}{2\pi}u\right)du \xrightarrow{u=\frac{2\pi x}{L}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{L}{2\pi}\alpha}^{\frac{L}{2\pi}(\alpha+2\pi)} f(x)\frac{2\pi}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2\pi}\alpha}^{\frac{L}{2\pi}\alpha+L} f(x)dx$$

چون $f(x)$ متناوب است می‌توان نوشت:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x)dx \,,\ A_n = \frac{2}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x)\cos(n\omega x)dx$$

$$B_n = \frac{2}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

Scanned by CamScanner

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$a_0=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos(2nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(1+2n)x}{1+2n}-\frac{\cos(1-2n)x}{1-2n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\ ,\ b_n=0$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(2nx)$$

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

الف) $f(t)$ فرد است پس

$$a_0=a_n=0\ ,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}\frac{4}{n\pi} & n=2k-1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)t=\begin{cases}-1 & -\pi<t<0\\ 1 & 0<t<\pi\end{cases}$$

با قرار دادن $t=\frac{\pi}{2}$ خواهیم داشت:

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\ldots\right)$$

ب) از طرفین $f(x)$ نسبت به t و در بازه 0 تا π انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{\pi}dt=\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin(nt)\right)dt\Rightarrow\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^{\pi}\frac{4}{n\pi}\sin(nt)dt\right]$$

$$\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-\cos(n\pi))}{n^2\pi}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(2k-1)^2\pi}$$

و سرانجام داریم:

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}\right)^2=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

Scanned by CamScanner

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

الف) $f(x)$ فرد است پس $a_۰ = a_n = ۰$ ، $l = ۱$.

$$b_n = \frac{۲}{۱}\int_۰^۱ f(x)\sin\frac{n\pi}{۱}x\,dx = ۲\int_۰^۱ x\sin n\pi x\,dx = ۲\left(\frac{\sin n\pi x}{n^۲\pi^۲} - \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Bigg|_۰^۱ = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}$$

$$\rightarrow f(x) = ۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin n\pi x$$

ب)

$$\ell = \pi\ ,\ a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi dx = ۱\ ,\ a_n = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \cos nx\,dx = ۰$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_۰^\pi \sin nx\,dx = \frac{-\cos nx}{n\pi}\Big|_۰^\pi = \begin{cases} ۰ & n = ۲k \\ \dfrac{۲}{n\pi} & n = ۲k+۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲k-۱)x}{۲k-۱}$$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

$$f(x) = a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_n\cos ۲nx + b_n\sin ۲nx)$$

$$a_۰ = \frac{۱}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)\,dx = \frac{۱}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(x^۲ + ۳\sin ۲x)\,dx = \frac{۱}{\pi}\left[\frac{x^۳}{۳} + \frac{۳}{۲}\cos ۲x\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi^۲}{۱۲}$$

$$a_n = \frac{۲}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(x^۲ + ۳\sin ۲x)\cos ۲nx\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} x^۲\cos ۲nx\,dx$$

$$= \frac{۲}{\pi}\left[\frac{x^۲}{۲n}\sin ۲nx + \frac{۲x}{۴n^۲}\cos ۲nx - \frac{۲}{۸n^۳}\sin ۲nx\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} = \begin{cases} \dfrac{۱}{n^۲} & \text{زوج } n \\ -\dfrac{۱}{n^۲} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$b_n = ۳\ ,\ b_n = \frac{۲}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(x^۲ + ۳\sin ۲x)\sin ۲nx\,dx = ۰ \quad \text{برای } n \neq ۱$$

مقدار سری فوریه در $x_۰ = ۰$ برابر $f(۰) = ۰$ و در $x_۱ = \frac{\pi}{۲}$ برابر $\dfrac{f(\frac{\pi}{۲}) + f(-\frac{\pi}{۲})}{۲} = \dfrac{\pi^۲}{۸}$ است.

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

$f(x)=x^{2} \quad , \quad -1<x<1$

$f(x)$ زوج است. پس b_n ها صفرند.

$$a_0=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos(\frac{n\pi x}{1})dx=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx$$

$$n\ge 1\Rightarrow a_n=2\{\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x\Big]_0^1-\int_0^1\frac{2x}{n\pi}\sin n\pi x dx\}=\frac{-4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x dx$$

$$=\frac{-4}{n\pi}\{\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1-\int_0^1\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x dx\}=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\Big]_0^1=\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$\rightarrow f(x) \text{ سری فوریه }=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

$$f(0)=0\Rightarrow\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}\Rightarrow 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{12}$$

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف)

$$f(x)=|x|\ ,\ l=\pi\ ,\ f(x)=2k\Rightarrow b_n=0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}(\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2})\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}\frac{-4}{n^2\pi} & n \text{ فرد}\\ 0 & n \text{ زوج}\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

ب) رابطه پارسوال:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow\frac{\pi^2}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^4}=\frac{2}{3}\pi^2\rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{1}{6}\pi^2\times\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}-1=\frac{\pi^4}{96}-1$$

Scanned by CamScanner

پاسخِ فصل ۲

انتگرال فوریه و تبدیل آن

پرسش ۱۱

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\frac{2\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

$$f(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=1\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$$

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega x d\omega \quad , \quad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\cos\omega x dx$$

$$A(\omega)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin(x+\omega x)+\sin(x-\omega x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(1+\omega)x}{1+\omega}-\frac{\cos(1-\omega)x}{1-\omega}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(\pi+\pi\omega)}{1+\omega}+\frac{\cos(\pi-\pi\omega)}{1-\omega}-\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{1-\omega}\right]$$

$$=\frac{+1}{2}\frac{2}{1-\omega^2}(\cos(\pi\omega)+1)=\frac{\cos(\pi\omega)+1}{1-\omega^2}$$

$$\frac{\pi}{2}\sin x=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\pi\omega+1}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega \xrightarrow{x=0}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\pi\omega+1}{1-\omega^2}d\omega=0$$

Scanned by CamScanner

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx \quad , \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

تابع زوج است $f(x)\Rightarrow B(\omega)=0$

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\cos\omega x dx=\frac{2e^{-x}}{\pi(1+\omega^2)}(\omega\sin\omega x-\cos\omega x)\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{2}{\pi(1+\omega^2)}$$

$$\to f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}dx$$

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

$$F(\omega)=F\{f(x)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}(1-x^2)\cos\omega x dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin x}{\omega}-\frac{2x\cos\omega x}{\omega^2}-\left(\frac{x^2}{\omega}-\frac{2}{\omega^3}\right)\sin\omega x\right)\Big]_{0}^{1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{2\cos\omega}{\omega^2}-\frac{2\sin\omega}{\omega^3}\right)=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}$$

محاسبه انتگرال داده شده: با گرفتن فوریه معکوس داریم:

$$F^{-1}\{F(\omega)\}=f(x)\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1-x^2 & |x|\le 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

بنابراین:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\gamma x dx=\begin{cases}\frac{\pi}{4}(\gamma^2-1) & |\gamma|\le 1\\ 0 & |\gamma|>1\end{cases}$$

وسرانجام:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)=\frac{-3\pi}{16}$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

Scanned by CamScanner

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

اگر تابع $f(x)=\frac{\pi}{2}x$ را گسترش زوج دهیم، داریم:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\frac{\pi}{2}x\cos\omega x dx$$

$$=[\frac{x}{\omega}\sin\omega x+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x]\Big|_0^1=\frac{1}{\omega}\sin\omega+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega-\frac{1}{\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}\cos\omega x d\omega$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos\omega x d\omega=e^{-x}(\frac{-\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\sin\omega x d\omega=e^{-x}(\frac{-\sin\omega x-\omega\cos\omega x}{1+\omega^2})\Big|_0^{\infty}=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}(\cos\omega x+\omega\sin\omega x)d\omega$$

همانطور که می‌بینیم به ازای $x=0$ هم درست است:
$$f(0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=\tan^{-1}\omega\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega$$

الف)

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos\omega x dx=e^{-x}(\frac{-\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2})\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\sin\omega x dx=\frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}(\cos\omega x+\omega\sin\omega x)dx$$

ب)

$$f(x)\Big|_{x=0}=\int_0^{\infty}A(\omega)d\omega=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}d\omega=tg^{-1}\omega\Big|_0^{\infty}=\frac{\pi}{2}$$

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

چون $f(x)$ زوج است، بنابراین $B(\omega)=0$ است.

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}(1-x^2)\cos\omega x dx$$

$$=\frac{۲}{\pi}\left[\frac{۱-x^۲}{\omega}\sin\omega x-\frac{۲x}{\omega^۲}\cos\omega x+\frac{۲}{\omega^۳}\sin\omega x\right]_۰^۱=\frac{۴}{\pi}\left(\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^۳}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۴}{\pi}\int_۰^{\infty}\frac{-\omega\cos\omega+\sin\omega}{\omega^۳}\cos\omega x d\omega$$

بنابراین اگر $f(\frac{۱}{۳})$ را محاسبه کنیم، داریم:

$$\Rightarrow\int_۰^{\infty}\frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^۳}\cos\frac{\omega}{۳}d\omega=-\frac{\pi}{۴}f(\frac{۱}{۳})=-\frac{\pi}{۴}(۱-\frac{۱}{۹})=-\frac{۲\pi}{۹}$$

۱۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x-|x|}dx=\int_۰^{\infty}e^{-(i\omega+۱)x}dx+\int_{-\infty}^{۰}e^{(i\omega-۱)x}dx$$

$$=-\frac{۱}{i\omega-۱}+\frac{۱}{i\omega+۱}=\frac{۲}{۱+\omega^۲}\quad,\quad f(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{۱+\omega^۲}e^{-i\omega x}d\omega$$

$$\Rightarrow\int_۰^{\infty}\frac{\cos\omega x}{۱+\omega^۲}d\omega=\frac{\pi}{۲}Re(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}}{\pi(۱+\omega^۲)}dx)=\frac{\pi}{۲}Re(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱}{۱+\omega^۲}\frac{e^{-i\omega x}}{\pi}d\omega)=\frac{\pi}{۲}Re\{e^{-|x|}\}$$

$$\Rightarrow\int_۰^{\infty}\frac{\cos(\alpha\ln ۳)}{۱+\alpha^۲}d\alpha=\frac{\pi}{۲}Re\{e^{-\ln ۳}\}=\frac{\pi}{۶}$$

۱۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

$$A(w)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos wx dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\cos wx\,dx$$

$$=۲\int_۰^{\infty}e^{-x}(\frac{e^{iwx}+e^{-iwx}}{۲})dx=\int_۰^{\infty}(e^{-(۱-iw)x}+e^{-(۱+iw)x})dx=\frac{۱}{۱-iw}+\frac{۱}{۱+iw}=\frac{۲}{۱+w^۲}$$

$$f(x)=\int_۰^{\infty}A(w)\cos wx dw=\int_۰^{\infty}\frac{۲\cos wx}{۱+w^۲}dw$$

$$\frac{\pi}{e^x}=\int_۰^{\infty}\frac{۲\cos w}{۱+w^۲}dw\Rightarrow\int_۰^{\infty}\frac{\cos w}{۱+w^۲}dw=\frac{\pi}{۲e^x}$$

۱۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

$$f(x)=\int_۰^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dx\quad\begin{cases}A(w)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos wx dx\\ B(w)=\frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin wx dx\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}\rightarrow$$ f(x) یک تابع زوج است

$$B(w)=0\quad ,\quad A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\cos wx\,dx$$

نکته: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos ax\,dx=\mathrm{Re}[2\pi i($ مجموع مانده‌های $f(z)e^{i\alpha z}$ در نقاط تکین نیم صفحه بالای محور افقی $)$
$+\pi i($ مجموع مانده‌های $f(x)e^{i\alpha z}$ در نقاط تکین روی محور حقیقی $)]$

$$\Rightarrow f(z)e^{i\alpha z}=\frac{1}{(z^2+1)^2}e^{iwz}=\frac{e^{iwz}}{[(z+i)(z-i)]^2}\rightarrow f(z)e^{iwz}=\frac{e^{iwz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

ابتدا نقاط تکین را پیدا می‌کنیم:

$$z^2+1=0\rightarrow z^2=-1\rightarrow z=\pm i\begin{cases}z=i & \text{بالای محور حقیقی}\\ z=-i & \text{پایین محور حقیقی}\end{cases}$$

پس مانده تابع $f(z)e^{iwz}$ را به ازای $z=i$ پیدا می‌کنیم:

$$f(z)e^{iwz}=\frac{e^{iwz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

به ازای این تابع $z=i$ قطب مرتبه ۲ است.

$$b_1=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$$

$$\rightarrow b_1\big|_{z=i}=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[\frac{e^{iwz}}{(z+i)^2}]=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(\frac{e^{iwz}}{(z+i)^2})$$

$$\rightarrow\lim_{z\to i}\frac{iwe^{iwz}(z+i)^2-2(z+i)e^{iwz}}{(z+i)^4}=\frac{iwe^{-w}(2i)^2-2(2i)e^{-w}}{(2i)^4}$$

$$\rightarrow b_1=\frac{iwe^{-w}(-4)-4ie^{-w}}{16}=\frac{-4we^{-w}-4e^{-w}}{16}i$$

حاصل انتگرال: $\mathrm{Re}[2\pi i(\frac{-4we^{-w}-4e^{-w}}{16}i)]=\mathrm{Re}[2\pi\frac{4we^{-w}+4e^{-w}}{16}]=\frac{\pi}{2}(we^{-w}+e^{-w})$

$$\Rightarrow A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}\cos wx\,dx=\frac{1}{2}(we^{-w}+e^{-w})$$

انتگرال فوریه: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}(we^{-w}+e^{-w})\cos wx\,dw$

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$f(x)=\begin{cases}x+\sin x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

تابع فرد است پس $A(w)=0$.

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin x)\sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(x+\sin x)\sin wx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\{\int_{0}^{\pi}x\sin wx\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(\cos((w-1)x)-\cos((w+1)x))dx\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\{\left[\frac{-x}{w}\cos wx\right]_{0}^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((w-1)x)}{w-1}-\frac{\sin((w+1)x)}{w+1}\right]_{0}^{\pi}\}$$

$$=\frac{-2}{w}\cos\pi w+\frac{1}{2}(\frac{\sin(w\pi-\pi)}{w-1}-\frac{\sin(w\pi+\pi)}{w+1})$$

$$=\frac{-2}{w}\cos\pi w+\frac{\sin\pi w}{2}(\frac{-2}{w^2-1})=\frac{-2\cos\pi w}{w}-\frac{\sin\pi w}{w^2-1}$$

$$\rightarrow f(x)=\int_{0}^{\infty}B(w)\sin wx\,dw=-\int_{0}^{\infty}(\frac{2\cos\pi w}{w}+\frac{\sin\pi w}{w^2-1})\sin wx\,dw$$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$A(w)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\cos wx\,dx=\frac{2\sin w}{\pi w}$$

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(w)\cos wx\,dw=\int_{0}^{\infty}\frac{2\sin w\cos wx}{\pi w}dw \qquad 0\le x<1$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\cos ax}{x}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w\cos aw}{w}dw=\frac{\pi}{2}f(a)=\frac{\pi}{2}$$

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی و با توجه به اینکه $v(w,t)=F_c\{u(x,t)\}$ داریم:

$$\ddot{v}+w^2v=0$$

$$v_t(w,0)=F_c\{u_t(x,0)\}=0 \quad , \quad v(w,0)=F_c\{u(x,0)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}\cos wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}$$

این معادله دارای جواب عمومی به‌صورت روبرو است: $v(w,t)=a(w)\cos wt+b(w)\sin wt$

$$\left.\begin{array}{l}v_t(w,0)=0\Rightarrow b(w)=0\Rightarrow v(w,t)=a(w)\cos wt\\ v(w,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}=a(w)\end{array}\right\}\Rightarrow v(w,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}.\cos wt$$

$$\Rightarrow u(x,t)=F_c^{-1}\{v(w,t)\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}v(w,t)\cos wx\,dw=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos wt.\cos wt\,dw$$

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سـایت گـروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

Scanned by CamScanner

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

$f(x)$ را به‌صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x>0\\ -\varphi(-x) & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)dw$$

فرد است $f(x)\Rightarrow A(w)=0$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin wx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin wx dx=\frac{1-\cos wx}{w}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\int_0^{\infty}B(w)\sin wx dw=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos wx}{w}\sin wx dw \qquad x>0\ ,\ x\neq\pi$$

۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید که $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$ ، تبدیل فوریه این تابع را محاسبه می‌کنیم:

فرد است $f(x)\Rightarrow A(w)=0$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin wx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin wx dx=\int_0^{\pi}\sin x\sin wx dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((w-1)x)-\cos((w+1)x))dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin((w-1)\pi)}{w-1}-\frac{\sin((w+1)\pi)}{w+1}\right)$$

$$=\frac{\sin\pi w}{2}\left(\frac{-2}{w^2-1}\right)=\frac{\sin\pi w}{1-w^2}$$

$$\to f(x)=\int_0^{\infty}(A(w)\cos wx+B(w)\sin wx)dw=\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi w}{1-w^2}\sin wx dw=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x & |x|\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سـایت گـروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

تابع $x>0$ ، $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x$ و $x<0$ ، $f(-x)=-f(x)$ را در نظر می‌گیریم و تبدیل فوریه آن را به‌دست می‌آوریم:

Scanned by CamScanner

$$A(w)=0 \quad , \quad B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x\sin wx\,dx=\int_{0}^{\infty}e^{-x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}dx$$

$$=\frac{1}{4i}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\left(e^{i(w+1)x}+e^{i(w-1)x}-e^{i(1-w)x}-e^{-i(1+w)x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{-1+i(w+1)}-\frac{1}{-1+i(w-1)}+\frac{1}{-1+i(1-w)}+\frac{1}{-1-i(1+w)}\right)$$

$$=\frac{1}{4i}\left(\frac{2i(w+1)}{1+(w+1)^2}+\frac{2i(w-1)}{1+(w-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{w+1}{1+(w+1)^2}+\frac{w-1}{1+(w-1)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{w+1}{w^2+2w+2}+\frac{w-1}{w^2-2w+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2w^3}{(w^2+2)^2-4w^2}\right)=\frac{w^3}{w^4+4}$$

$$\to f(x)=\int_{0}^{\infty}B(w)\sin wx\,dx \Rightarrow \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x=\int_{0}^{\infty}\frac{w^3\sin wx}{w^4+4}dw$$

Scanned by CamScanner

پاسخِ فصل ۳

پرسش ۱۵

معادلات با مشتقات جزئی

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) مرحله اول: با توجه به شرایط مرزی داده شده شکل جواب، عبارت است از:

$$u(x,y)=G_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)\cos nx \qquad (1)$$

مشتقات جزئی را محاسبه و در مسئله جایگذاری می‌کنیم.

$$u_x=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)(-n\sin nx)\rightarrow u_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2G_n(y)\cos nx \qquad (2)$$

$$u_y=G_0'(y)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n'(y)\cos nx\rightarrow u_{yy}=G_0''(y)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(y)\cos nx \qquad (3)$$

Scanned by CamScanner

با جایگذاری(۲) و(۳) در مسئله داریم:

$$G_0''(y)+\sum_{n=1}^{\infty}(G_n''(y)-n^2G_n(y))\cos(nx)=2(x-1)$$

اگر رابطه به‌دست آمده را سری فوریه کسینوسی نظیر تابع $f(x)=2(x-1)$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$G_0''(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2(x-1)dx=\frac{1}{\pi}[x^2-2x]\Big|_0^{\pi}=\pi-2$$

$$G_0'(y)=(\pi-2)y+a_0 \rightarrow G_0(y)=\frac{(\pi-2)}{2}y^2+a_0y+b_0 \qquad (4)$$

مشتق	انتگرال
$x-1$ (+)	$\cos nx$
1 (−)	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$

$$G_n''(y)-n^2G_n(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2(x-1)\cos nx\,dx$$

$$G_n''(y)-n^2G_n(y)=\frac{4}{\pi}\Big[\frac{x-1}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big]\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi n^2}((-1)^n-1)$$

از حل معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$G_n(y)=A_n\cosh(ny)+B_n\sinh(ny)-\frac{4}{\pi n^4}((-1)^n-1) \qquad (5)$$

با جایگذاری(۴) و(۵) در(۱) داریم:

$$u(x,y)=(\frac{\pi}{2}-1)y^2+a_0y+b_0$$

$$\rightarrow+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh(ny)+B_n\sinh(ny)+\frac{4}{\pi n^4}((-1)^{n+1}+1))\cos nx \qquad (6)$$

مرحله دوم: تعیین ضرایب مجهول با استفاده از شرایط اولیه

$$u(x,0)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+\frac{4}{\pi n^4}((-1)^{n+1}+1))\cos nx=x$$

رابطه بالا را سری فوریه کسینوسی نظیر تابع $f(x)=x$ در نظر می‌گیریم. در نتیجه داریم:

مشتق	انتگرال
x (+)	$\cos nx$
1 (−)	$\frac{1}{n}\sin nx$
0	$\frac{-1}{n^2}\cos nx$

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{\pi}{2} \qquad (7)$$

$$A_n+\frac{4}{\pi n^4}((-1)^{n+1}+1)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)$$

$$A_n=((-1)^n-1)\frac{2}{\pi n^2}(\frac{2}{n^2}+1) \qquad (8)$$

با جایگذاری (۷) و (۸) در (۶) داریم:

$$u(x,y)=(\frac{\pi}{2}-1)y^2+a_0y+\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2}{\pi n^2}(\frac{2}{n^2}+1)$$

$$((-1)^n-1)\cosh ny+B_n\sinh ny+\frac{4}{\pi n^4}((-1)^{n+1}+1)]\cos nx$$

Scanned by CamScanner

با جایگذاری $y=1$ در رابطه فوق و استفاده از شرط مرزی $u(x,1)=x-x^2$ داریم:

$$a_0=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{3}+1-\pi$$

$$B_n=\frac{1}{\sinh n}\left[\frac{1}{n^2}((2\pi-1)(-1)^n+1)-\frac{2}{\pi n^2}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)((-1)^n-1)\cosh(n)-\frac{4}{\pi n^4}((-1)^{n+1}+1)\right]$$

ب) معادله داده شده یک معادله گرمای یک بعدی غیرهمگن در حالت نیمه نامتناهی است. لذا با توجه به شرایط مرزی، از طرفین PDE نسبت به متغیر x تبدیل سینوسی فوریه می‌گیریم.

مرحله اول:

$$F_s(u_t-4u_{xx})=F_s(e^{-2x})\Rightarrow v_t(\omega,t)-4\left(-\omega^2v(\omega,t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega u(0,t)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4}$$

$$v_t+4\omega^2v=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4}$$

با حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول غیرهمگن به‌دست آمده داریم:

$$v(\omega,t)=e^{-\int 4\omega^2dt}\left\{\int\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4}e^{\int 4\omega^2dt}dt+A(\omega)\right\}$$

$$=e^{-4\omega^2t}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{\omega^2+4}\frac{1}{4\omega^2}e^{4\omega^2t}+A(\omega)\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4\omega(\omega^2+4)}+A(\omega)e^{-4\omega^2t}\qquad(1)$$

مرحله دوم: برای تعیین ضرایب مجهول از طرفین شرایط اولیه، تبدیل سینوسی فوریه می‌گیریم.

$$F_s(u(x,0))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 x\sin(\omega x)dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-x}{\omega}\cos\omega x+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega x\right)\Big|_0^1$$

$$v(\omega,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-1}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right)=H(\omega)\qquad(2)$$

با جایگذاری $t=0$ در (۱) و استفاده از (۲) داریم:

$$v(\omega,0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4\omega(\omega^2+4)}+A(\omega)=H(\omega)$$

$$A(\omega)=H(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{4\omega(\omega^2+4)}$$

مرحله سوم: مقدار $A(\omega)$ را در (۱) جایگذاری و از آن تبدیل معکوس سینوسی فوریه می‌گیریم لذا

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty v(\omega,t)\sin\omega x\,d\omega$$

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$u_{tt}-u_{xx}=f(t)$$

$$f(t)=\begin{cases}t^2+1 & 0<t\le\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$$

$$u(x,0)=\begin{cases}\sin x & 0\le x\le \pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}\qquad u_t(x,0)=0\qquad u(0,t)=0\qquad u(\infty,t)=0$$

از طرفین تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم:

$$S^2V(x,s)-Su(x,0)-u_t(x,0)-V_{xx}(x,s)=f_s\{f(t)\}$$

تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$F_s(w)=\int_0^\infty f(t)\sin wt\,dt=\int_0^\pi (t^2+1)\sin wt\,dt$$

$$\frac{-(t^2+1)}{w}\cos wt\Big|_0^\pi+\frac{2t}{w^2}\sin wt\Big|_0^\pi+\frac{2}{w^3}\cos wt\Big|_0^\pi$$

$$\to\frac{-(\pi^2+1)}{w}\cos w\pi-\left(\frac{-1}{w}\right)+\frac{2\pi}{w^2}\sin wn+\frac{2}{w^3}(\cos w\pi-1)$$

$$=\frac{-(\pi^2+1)}{w}\cos w\pi+\frac{1}{w}+\frac{2\pi}{w^2}\sin w\pi+\frac{2}{w^3}(\cos w\pi-1)=\phi(w)$$

$$S=+jw\to -w^2V(x,w)-jw\sin x-V_{xx}(x,w)=\phi(w)$$

$$\to V_{xx}(x,w)+w^2V(x,w)=-jw\sin x-\phi(w)$$

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه (۲) با ضدایی ثابت:

همگن: $V_{xx}(x,w)+w^2V(x,w)=0\to(D^2+w^2)V(x,w)=0-D=\pm jw$

$$\to V(x,w)=(A\cos wx+\beta\sin wx)$$

قسمت ناهمگن:

$$y_{p_1}=\frac{-jw\sin x}{D^2+w^2}\Big|_{e^2=1}=\frac{-jw\sin x}{w^2-1}$$

$$y_{p_2}=\frac{-\phi(w)}{D^2+w^2}\Big|_{e=0}=\frac{-\phi(w)}{w^2}$$

$$u(x,w)=(A\cos wx+\beta\sin wx)-\frac{jw\sin x}{w^2-1}-\frac{\phi(w)}{w^2}$$

$$\to u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty u(x,w)\sin wx\,dw$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$u_{tt}=9u_{xx}\ ,\ 0\le x<\infty$$

$$u(0,t)=\begin{cases}1 & 0\le t<2\pi\\ 0 & t\ge 2\pi\end{cases}\qquad \lim_{x\to\infty}u(x,t)=0\qquad u(x,0)=0\ ,\ u_t(x,0)=0$$

نسبت به پارامتر t تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

$$S^2V(x,s)-Su(x,0)-u_t(x,0)=9u_{xx}(x,s)$$

$$S^2V(x,s)=9V_{xx}(x,s)\to 9V_{xx}(x,s)-S^2V(x,s)=0$$

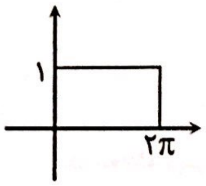
Scanned by CamScanner

$$\to (9D^2 - S^2)V(x,s) = 0 \to D = \pm\frac{s}{3}$$

$$V(x,s) = A(s)e^{\frac{s}{3}x} + B(s)e^{\frac{-s}{3}x}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0 \to \lim_{x\to\infty}(x,s) = 0 = A(s)e^{\infty} + B(s)e^{-\infty} \Rightarrow A(s) = 0$$

$$V(x,s) = B(s)e^{\frac{-s}{3}x} \to V(0,s) = B(s) = L\{u(0,t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s}$$



$$u(0,t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 2\pi \\ 0 & t \ge 2\pi \end{cases}$$

$$L\{u(0,t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{2\pi} e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{s}(e^{-2\pi s} - 1) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s}$$

$$V(x,s) = (\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-2\pi s})e^{-\frac{s}{3}x} \Rightarrow u(x,s) = \frac{1}{s}e^{-\frac{s}{3}x} - \frac{1}{s}e^{-s(\frac{x}{3}+2\pi)}$$

$$u(x,t) = u(t - \frac{x}{3}) - u(t - \frac{x}{3} - 2\pi)$$

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$u(x,t) = f(x)y(t) \to g''f = 4f''g \to \frac{g''}{g} = \frac{4f''}{f} = k$$

معمولاً k را $(-a^2)$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{g''}{g} = -a^2 \to g'' = -a^2 g \Rightarrow g^2 + a^2 g = 0 \to (D^2 + a^2)g = 0 \to D^2 = -a^2 \to D = \pm aj$$

$$g(t) = (A\cos at + \beta \sin at)$$

$$\frac{4f''}{f} = -a^2 \to 4f'' = -a^2 f \to 4f'' + a^2 f = 0 \to (4D^2 + a^2)f = 0 \to D^2 = \frac{-a^2}{4} \to D = \pm\frac{aj}{2}$$

$$f(x) = C\cos\frac{a}{2}x + D\sin\frac{a}{2}x$$

$$u(x,t) = (C\cos\frac{a}{2}x + D\sin\frac{a}{2}x)(A\cos at + \beta\sin at)$$

$$u_x(0,t) = 0 \to g(t)(-\frac{ca}{2}\sin\frac{a}{2}x + D\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}x)\Big|_{x=0} = g(t)(0 + D\frac{a}{2}) = 0 \to D = 0$$

$$u_x(1,t)=0\rightarrow g(t)(-\frac{c}{2}a\sin\frac{a}{2})=0\rightarrow \sin\frac{a}{2}=0\rightarrow \frac{a}{2}=k\pi\rightarrow a=2k\pi$$

$$u(x,t)=(C\cos k\pi x)(A\cos 2k\pi t+\beta\sin 2k\pi t)$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$2z_x+z_y+2(x-y)z=(x-y)(x-2y)$$

$$u=x-2y\ ,\ v=x-y$$

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$z_y=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

$$2\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}-2\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}+2vz=vu\rightarrow \frac{\partial z}{\partial v}+2vz=vu$$

$$y'+p(x)y=Q|x|$$

$$z_v+z(2v)=u|v|$$

$$f=e^{\int 2vdv}=e^{v^2}$$

$$z=e^{-v^2}(\int e^{v^2}uvdv+c)=e^{-v^2}(u\int e^{v^2}vdv+c)=e^{-v^2}(\frac{u}{2}e^{v^2}+c)=\frac{u}{2}+ce^{-v^2}$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) تعریف می‌کنیم:

$$u_{yy}+u_{xx}=0\ ,\ u(x,y)=v(x,y)+\gamma(n,y)$$

به طوری‌که:

$$v(0,y)=v(\pi,y)=0\Rightarrow\begin{cases}\gamma(0,y)=y\\ \gamma(\pi,y)=1-y\end{cases}$$

$$\gamma(x,y)=\alpha(y)x+\beta(y)$$

$$\begin{cases}\alpha(y)=\dfrac{(1-2y)}{\pi}\\ \beta(y)=y\end{cases}\rightarrow \gamma(x,y)=\frac{x}{\pi}(1-2y)+y$$

$$v(x,y)=\sum v_n(y)\sin nx$$

$$u_{yy}+u_{xx}=0\ ,\ \gamma_{xx}=0\ ,\ \gamma_{yy}=0$$

$$v_{yy}+v_{xx}=0\Rightarrow \sum(v''_n(y)-n^2v_n(y))\sin nx=0$$

$$v''_n(y)-n^2v_n(y)=0\Rightarrow v_n(y)=A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}$$

Scanned by CamScanner

$$u(x,y)=[\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{ny}+B_n e^{-ny})\sin nx]+\frac{x}{\pi}(1-2y)+y$$

$$u_y(x,0)=0\Rightarrow\sum(nA_n-nB_n)\sin nx+\frac{-2x}{\pi}+1=0$$

$$n(A_n-B_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{2x}{\pi}-1)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}(\frac{-2x\cos nx}{n\pi}+\frac{2\sin nx}{n^2\pi}+\frac{\cos nx}{n})\Big|_0^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}((-1)^n+1)$$

$$u(x,\pi)=0\Rightarrow\sum(A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi})\sin nx+\frac{x}{\pi}(1-2\pi)+\pi=0$$

$$A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi}=\frac{2}{\pi}\int(\frac{x}{\pi}(2\pi-1)-\pi)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}(\frac{-(2\pi-1)x\cos nx}{n\pi}+\frac{(2\pi-1)\sin nx}{n^2\pi}+\frac{\pi\cos nx}{n})\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}((1-\pi)(-1)^n-\pi)$$

دو معادله دو مجهول داریم که با حل آن‌ها A_n و B_n به‌دست می‌آید و در $u(x,y)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{\dfrac{-2}{n^2\pi}((-1)^n+1)+\dfrac{2e^{n\pi}}{n\pi}((1-\pi)(-1)^n-\pi)}{1+e^{2n\pi}}\\ B_n=A_n+\dfrac{2}{n^2\pi}((-1)^n+1)\end{cases}$$

ب) از طرفین معادله تبدیل فوریه نامتناهی نسبت به x می‌گیریم.

$$F\{u_{xx}\}=-w^2v(w,t)\quad,\quad F\{u_t\}=v_t(w,t)$$

با جایگذاری در معادله داریم: $v_t+4w^2v=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}(x-t)e^{-iwx}dx$

مشتق	انتگرال
$x-t$ (+)	e^{-iwx}
1 (−)	$\frac{e^{-iwx}}{-iw}$
0	$\frac{e^{-iwx}}{(-iw)^2}$

$$v_t+4w^2v=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[-(x-t)\frac{e^{-iwx}}{iw}+\frac{e^{-iwx}}{w^2}]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$v_t+4w^2v=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-iw\pi}(\frac{-\pi+t}{iw}+\frac{1}{w^2})-e^{iw\pi}(\frac{\pi+t}{iw}+\frac{1}{w^2})]$$

$$v_t+4w^2v=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{-\pi}{iw}(e^{-iw\pi}+e^{iw\pi})+\frac{1}{w^2}(e^{-iw\pi}-e^{iw\pi})]+\frac{t}{iw}(e^{-iw\pi}-e^{iw\pi})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\frac{-2\pi}{iw}\cos w\pi-\frac{2}{w^2}\sin w\pi-\frac{2t}{iw}\sin w\pi]=k(t)$$

$$=\frac{1}{w^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}[(iw\pi\cos w\pi-\sin w\pi)+(iw\sin w\pi)t]$$

$$v_t + ۴w^۲ v = \frac{۱}{w^۲}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[A(w) + tB(w)] \qquad (*)$$

که $A(w) = iw\pi\cos w\pi - \sin w\pi$ و $B(w) = iw\sin w\pi$

معادله دیفرانسیل (*) یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشد که جواب آن عبارت است از:

$$v(w,t) = \frac{۱}{w^۲}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}e^{-۴w^۲t}[\int e^{۴w^۲t}(A(w) + tB(w))dt + c] \qquad (**)$$

$$v(w,t) = \frac{۱}{۱۶w^۶}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}[۴w^۲A(w) + ۴w^۲tB(w) - B(w) + ۱۶w^۴ce^{-۴w^۲t}]$$

اکنون از طرفین شرط داده شده تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$F\{u(x,۰)\} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iwx}dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\{\int_{-\infty}^{۰} e^{x}e^{-iwx}dx + \int_{۰}^{\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx\}$$

$$v(w,۰) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\{[\frac{e^{(۱-iw)x}}{۱-iw}]\Big|_{-\infty}^{۰} + [\frac{e^{-(۱+iw)x}}{-(۱+iw)}]\Big|_{۰}^{\infty}$$

$$v(w,۰) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}(\frac{۱}{۱-iw} + \frac{۱}{۱+iw}) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}(\frac{۱}{۱+w^۲})$$

در رابطه (**) قرار می‌دهیم $t = ۰$ و برابر با عبارت بالا قرار می‌دهیم تا مجهول c معلوم گردد.

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) $u_t = ۲۵u_{xx} \quad x > ۰, t > ۰ \quad u_x(۰,t) = ۰, u(x,۰) = f(x) = xe^{-x}$

با توجه به این که $۰ < x < \infty$ و شرط مرزی $u_x(۰,t)$ معین شده است از طرفین معادله تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم و فرض می‌کنیم $V(\omega,t)$ تبدیل کسینوسی نامتناهی $u(x,t)$ باشد.

$$u_t = ۲۵u_{xx} \Rightarrow F_c\{u_t\} = ۲۵F_C\{u_{xx}\} \Rightarrow V_t(\varepsilon,t) = -۲۵\omega^۲V(\omega,t)$$

اکنون معادله دیفرانسیل مرتبه اول $V_t = -۲۵\omega^۲V$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{dV}{dt} = -۲۵\omega^۲V \Rightarrow \frac{dV}{V} = -۲۵\omega^۲dt \Rightarrow LnV = -۲۵\omega^۲t + C$$

$$\Rightarrow V = e^{-۲۵\omega^۲t+c} \Rightarrow V(\omega,t) = a(\omega)e^{-۲۵\omega^۲t} \qquad (۱)$$

برای پیدا کردن $a(\omega)$ از طرفین شرط اولیه $u(x,۰) = xe^{-x}$ تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم.

$$F_C\{u(x,۰)\} = V(\omega,۰) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^{\infty} u(x,۰)\cos\omega x dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^{\infty} xe^{-x}\cos\omega x dx$$

انتگرال ایجاد شده در بالا را به کمک تبدیلات لاپلاس حل می‌کنیم.

$$L(\cos\omega x) = \frac{s}{s^۲ + \omega^۲} \Rightarrow L(e^{-x}\cos\omega x) = \frac{s+۱}{(s+۱)^۲ + \omega^۲}$$

Scanned by CamScanner

$$L(xe^{-x}\cos\omega x)=-(\frac{s+1}{(s+1)^2+\omega^2})$$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\cos\omega x dx=-\frac{(s+1)^2+\omega^2-2(s+1)^2}{((s+1)^2+\omega^2)^2}\Bigg|_{s=0}=-\frac{\omega^2-2}{(1+\omega^2)^2}=\frac{2-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\qquad(2)$$

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم $t=0$ و (۲) را جایگذاری می‌کنیم.

$$V(\omega,0)=a(\omega)=\frac{2-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}\rightarrow v(\omega,t)=\frac{2-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}e^{-25\omega^2 t}$$

$u(x,t)$ با فوریه معکوس گرفتن از $v(\omega,t)$ به‌دست می‌آید.

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{2-\omega^2}{(1+\omega^2)^2}e^{-25\omega^2 t}\cos\omega x d\omega$$

ب) در مرحله اول شرایط مرزی را همگن ساخته و مسئله جدید را بازنویسی می‌کنیم. با توجه به شرایط مرزی مسئله از تغییر متغیر $w(x,t)=a+bx$ استفاده می‌کنیم به طوری که $\begin{cases}w(0,t)=\frac{1}{4}t^2\\ w_x(1,t)=-1\end{cases}$ که در نتیجه $a=\frac{1}{4}t^2$ و $b=-1$ و در نتیجه $w(x,t)=\frac{1}{4}t^2-x$. اکنون با تغییر متغیر $u(x,t)=V(x,t)+\frac{1}{4}t^2-x$ و جایگذاری مشتقات جزئی آن در معادله مسئله جدید را بازنویسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}u_t=V_t+\frac{1}{2}t\Rightarrow u_{tt}=V_{tt}+\frac{1}{2}\\ u_x=V_x-1\Rightarrow u_{xx}=V_{xx}\end{array}\right\}\Rightarrow 4(V_{tt}+\frac{1}{2})=V_{xx}\qquad 0<x<1\ ,\ t>0$$

مسئله جدید به همراه شرایط مرزی و اولیه آن عبارتند از:

$$\begin{cases}4V_{tt}-V_{xx}=-2 & 0<x<1\ ,\quad t>0 \quad (1)\\ BC: V(0,t)=0=V_x(1,t) & ,\quad t>0 \quad (2)\\ IC: V(x,0)=x^2\ ,\ V_t(x,0)=0 & ,\quad 0<x<1 \quad (3)\end{cases}$$

در مرحله دوم شکل جواب را تعیین می کنیم. با توجه به شرایط مرزی (۲) جواب مسئله را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^\infty G_n(t)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

$$\left.\begin{array}{l}V_{tt}=\sum_{n=1}^\infty G_n''(t)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\\ V_{xx}=-\sum_{n=1}^\infty G_n(t)(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{با جایگذاری در (1)}}$$

Scanned by CamScanner

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(4G_n''(t)+(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}}_{\text{ضریب فوریه سینوسی}})\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x=-2$$

$$4G_n''(t)+(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}G_n(t)=2\int_0^1(-2)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}xdx=\frac{-8}{(2n-1)\pi} \qquad (4)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن نظیر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم(۴) عبارت است از:

$$G_{n_1}(t)=a_n\cos((2n-1)\frac{\pi}{4}t)+b_n\sin((2n-1)\frac{\pi}{4}t) \ (5)$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل(۴) عبارت است از:

$$G_{n_2}(t)=\frac{-8}{(2n-1)\pi}\div(2n-1)^2\frac{\pi^2}{4}=\frac{-32}{(2n-1)^3\pi^3} \qquad (6)$$

از جمع دو جواب عمومی (۵) و جواب خصوصی (۶) داریم:

$$G_n(t)=a_n\cos((2n-1)\frac{\pi}{4}t)+b_n\sin((2n-1)\frac{\pi}{4}t)-\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}$$

و در نتیجه:

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}t+b_n\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}t-\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}]\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

در مرحله سوم با استفاده از شرایط اولیه (۳) ضرایب مجهول a_n و b_n را محاسبه می‌کنیم.

$$V(x,0)=x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(a_n-\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}}_{\text{ضریب فوریه سینوسی}})\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x$$

$$a_n-\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}=2\int_0^1x^2\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}xdx$$

$$a_n=\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}+2[\frac{8\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{16}{(2n-1)^3\pi^3}]$$

$$a_n=\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=\begin{cases}\frac{16}{\pi^2} & , n=1\\ \frac{-16}{(2n-1)^2\pi^2} & , n=2,3,\ldots\end{cases}$$

$$V_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[b_n(2n-1)\frac{\pi}{4}]\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x=0\Rightarrow b_n=0$$

Scanned by CamScanner

و در نتیجه جواب معادله اصلی عبارتند از:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}t-\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}\right]\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{4}t^2-x$$

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

قرار می‌دهیم $u(x,y)=F(x)G(y)\neq 0$ با جایگذاری مشتقات جزئی در معادله داریم:

$$F''(x)G(y)=F(x)G''(y)\Rightarrow\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(y)}{G(y)}=k$$

با فرض $k=-\lambda^2$ داریم:

$$F''(x)+\lambda^2F(x)=0 \qquad (1)$$

$$G''(y)+\lambda^2G(y)=0 \qquad (2)$$

از حل معادله(۱) داریم:

$$F(x)=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x \qquad (3)$$

با استفاده از شرایط مرزی مسئله می‌توان نوشت:

$$x(0,y)=F(0)G(y)=0\Rightarrow F(0)=0\xrightarrow{(3)}B=0 \qquad (4)$$

مقدار ویژه:

$$u(1,y)=F(1)G(y)=0\xrightarrow{(3)}A\sin\lambda=0\Rightarrow\lambda=n\pi \qquad (5)$$

جایگذاری (۴) و(۵) در(۳):

$$F_n(x)=A_n\sin n\pi x\,,\quad n=1,2,3,\ldots \qquad (6)$$

از حل معادله دیفرانسیل(۲) و قرار دادن (۵) داریم:

$$G(y)=C\sin n\pi y+D\cos n\pi y$$

با اعمال شرط $u_y(x,0)=0$ داریم:

$$u_y(x,0)=F(x)G'(0)=0\Rightarrow G'(0)=Cn\pi)\cos 0=0\Rightarrow C=0$$

$$G_n(y)=D_n\cos n\pi y, n=1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

$$\xrightarrow{(6),(7)}u_n(x,y)=F_n(x)G_n(y)=A_n\sin n\pi x D_n\cos n\pi y$$

$$k_n=A_nD_n\Rightarrow u_n(x,y)=k_n\sin n\pi x\cos n\pi y$$

با اعمال شرط $u(x,0)=3\sin\pi x$ داریم:

$$u_n(x,0)=k_n\sin n\pi x=3\sin\pi x\Rightarrow k_n=3\frac{\sin\pi x}{\sin n\pi x},n=1,2,3,\ldots$$

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

Scanned by CamScanner

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

شرایط مرزی در هر دو متغیر x و y، نا همگن است. پس فرض می‌کنیم:

$$u(x,y)=w(x,y)+\varphi(x,y)$$

که $w(x,y)$ دارای شرایط مرزی همگن در مورد متغیر x است. یعنی:

$$w(0,y)=w(\pi,y)=0$$

بنابراین $\varphi(x,y)$ به شکل $\varphi(x,y)=c_1(y)x+c_2(y)$ است. درنتیجه

$$\begin{cases} u(0,y)=w(0,y)+\varphi(0,y)=c_2(y)=2y \\ u(\pi,y)=w(\pi,y)+\varphi(\pi,y)=c_1(y)\pi+2y=y+1 \Rightarrow c_1(y)=\dfrac{1-y}{\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y)=c_1(y)x+c_2(y)=\frac{x}{\pi}(1-y)+2y$$

حال محاسبه $w(x,y)$ با توجه به این که نسبت به x همگن است: $w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} w_n(y)\sin nx$

$$u_{xx}+u_{yy}=xy \Rightarrow w_{xx}+\varphi_{xx}+w_{yy}+\varphi_{yy}=xy$$

$$-\sum n^2 w_n(y)\sin nx+\sum w_n''(y)\sin nx=xy \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(w_n''(y)-n^2w_n(y))\sin nx=xy$$

سری فوریه سینوسی:

$$w_n''(y)-n^2w_n(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2y}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Big]_0^{\pi}=\frac{2y}{n}(-1)^{n+1}$$

جواب عمومی $w_g(y)=A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}$

جواب خصوصی $w_p(y)=C_ny+D_n$

ابتدا ضرایب C_n و D_n را با جایگذاری سپس A_n و B_n را با کمک شرایط مرزی به دست می‌آوریم:

$$w_n''(y)-n^2w_n(y)=\frac{2y}{n}(-1)^{n+1} \Rightarrow -n^2(C_ny+D_n)=\frac{2y}{n}(-1)^{(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} D_n=0 \\ C_n=\dfrac{2y}{n^3}(-1)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow w_n(y)=A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}+\frac{2(-1)^n}{n^3}y$$

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}+\frac{2(-1)^2}{n^3}y)\sin nx$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases}u(x,0)=x\\ u(x,\pi)=2\pi-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w(x,0)+\varphi(x,0)=x\\ w(x,\pi)+\varphi(x,\pi)=2\pi-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w(x,0)=x-\frac{x}{\pi}=x(1-\frac{1}{\pi})\\ w(x,\pi)=2\pi-x-\frac{x}{\pi}(1-\pi)-2\pi=\frac{-x}{\pi}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sum(A_n+B_n)\sin nx=x(1-\frac{1}{\pi})\\ \sum(A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}+\frac{2\pi(-1)^n}{n^3})\sin nx=\frac{-x}{\pi}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_n+B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(1-\frac{1}{\pi})\sin nx dx\\ A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}+\frac{2\pi(-1)^n}{n^3}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{-x}{\pi}\sin nx dx\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_n+B_n=\frac{2}{\pi}(1-\frac{1}{\pi})(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n})\Big]_0^\pi=\frac{2}{n}(1-\frac{1}{\pi})(-1)^{n+1}\\ A_ne^{n\pi}+B_ne^{-n\pi}+\frac{2\pi(-1)^n}{n^3}=\frac{-2}{\pi^2}(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n})\Big]_0^\pi=\frac{2}{n\pi}(-1)^n\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_n+B_n=\frac{2}{n}(1-\frac{1}{\pi})(-1)^{n+1}\\ A_ne^{2n\pi}+B_n=\frac{2(-1)^ne^{n\pi}}{n}(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n^2})\end{cases}$$

از این دستگاه A_n و B_n به دست می‌آید:

$$\begin{cases}A_n=\frac{2(-1)^n}{n(e^{2n\pi}-1)}[e^{n\pi}(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n^2})+(1-\frac{1}{\pi})]\\ B_n=\frac{2}{n}(1-\frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}-\frac{2(-1)^n}{n(e^{2n\pi}-1)}(e^{n\pi}(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{n^2})+(1-\frac{1}{\pi}))\end{cases}$$

با داشتن A_n و B_n، $u(x,y)$ به دست می‌آید:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(A_ne^{ny}+B_ne^{-ny}+\frac{2(-1)^n}{n^3}y)\sin nx\}+\frac{x}{\pi}(1-y)+2y$$

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$u_{tt}-9u_{xx}=0$$

بهترین فوریه را روی x اعمال می کنیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(\omega,t)-9(i\omega)^2F(\omega,t)=0$$

$$F_{tt}+9\omega^2F=0 \Rightarrow \lambda^2+9\omega^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm i3\omega \Rightarrow F(\omega,t)=A(\omega)\cos 3\omega t+B(\omega)\sin 3\omega t$$

$$\begin{cases} u(x,0)=4e^{-|x|} \xrightarrow{F} F(\omega,0)=\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}e^{-(1+i\omega)x}dx+\int_{\infty}^{0}e^{-(1-i\omega)x}dx\int_{-\infty}^{0}e^{-(1-i\omega)x}dx\right) \\ u_t(x,0)=0 \xrightarrow{F} \left.\dfrac{\partial F(\omega,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} u(x,0)=\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1}{1+i\omega}+\dfrac{1}{1-i\omega}\right)=\dfrac{8}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)} \\ F_t(w,0)=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A(\omega)=\dfrac{8}{\sqrt{2\omega}(1+\omega^2)} \rightarrow F(\omega,t)=\dfrac{8}{\sqrt{2\pi}(1+\pi^2)}\cos 3\omega t \\ B(\omega)=0 \end{cases}$$

$$F(\omega,t)=\frac{1}{2}(e^{i3\omega t}+e^{-i3\omega t})\left(\frac{8}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)}\right)$$

با توجه به اینکه $F(f(x-x))=e\,F(\omega)$ و اینکه $F(4e^{-|x|})=\dfrac{8}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}$ داریم:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(4e^{-|x+3t|}+4e^{-|x-3t|})=2(e^{-|x+3t|}+e^{-|x-3t|})$$

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

قرار می‌دهیم $w(x,t)=ax+b$ به طوری که $w(0,t)=1$ و $w(\pi,t)=3$ و در نتیجه داریم:

$$a=\frac{2}{\pi}\ ,\ w(0,t)=b=1\ ,\ w(\pi,t)=a\pi+1=3 \Rightarrow a=\frac{2}{\pi}$$

سپس تغییر متغیر $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ را به کار می‌بریم و مشتقات جزئی را در مسئله جایگذاری می‌کنیم.

$$u_t(x,t)=v_t(x,t)+w_t(x,t) \rightarrow u_t=v_t$$

$$u_x(x,t)=v_x(x,t)+w_x(x,t) \rightarrow u_x=v_x+\frac{2}{\pi},u_{xx}=v_{xx}$$

مسئله جدید با شرایط مرزی همگن عبارتند از:

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+\sin x \\ v(0,t)=v(\pi,t)=0\ ,\ v(x,0)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x-1 \end{cases}$$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

فرض می‌کنیم $u(x,t)=F(x)G(t)\neq 0$ و مشتقات جزئی را در معادله جایگذاری می کنیم.

$$4F''(x)G(t)=F(x)G''(t) \rightarrow 4\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{G''(t)}{G(t)}=k$$

با فرض $k=-\lambda^2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن $F''(x)+\dfrac{\lambda^2}{4}F(x)=0$ عبارتند از:

Scanned by CamScanner

$$F(x)=A\sin(\frac{\lambda}{۲}x)+B\cos(\frac{\lambda}{۲}x)$$

و با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$u(۰,t)=F(۰)G(t)=۰\xrightarrow{G(t)\neq ۰}F(۰)=۰\Rightarrow B=۰$$

$$u(۱,t)=F(۱)G(t)=۰\rightarrow F(۱)=۰\rightarrow A\sin(\frac{\lambda}{۲})=۰\rightarrow A\neq ۰\rightarrow \frac{\lambda}{۲}=n\pi$$

$$\rightarrow \lambda=۲n\pi, n=۱,۲,۳,...\Rightarrow F_n(x)=A_n\sin(n\pi x), n=۱,۲,۳,... \qquad (۱)$$

به ازای $\lambda=-۴n^۲\pi^۲$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن $G''_n(t)+۴n^۲\pi^۲G_n(t)=۰$ عبارتند از:

$$G_n(t)=C_n\sin ۲n\pi t+D_n\cos ۲n\pi t$$

با اعمال شرط $u_t(x,۰)=۰$ داریم:

$$u_t(x,۰)=F(x)G'(۰)=۰\rightarrow F(x)\neq ۰, G'(۰)=۰\rightarrow C_n=۰$$

$$G_n(t)=D_n\cos ۲n\pi t, n=۱,۲,۳,... \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=A_nD_n\sin n\pi x\cos ۲n\pi t$$

قرار می‌دهیم: $k_n=A_nD_n$ و $n=۱,۲,۳,...$

$$u_n(x,t)=k_n\sin(n\pi x)\cos(۲n\pi t)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}k_n\sin n\pi x\cos ۲n\pi t$$

اکنون با اعمال شرط $u(x,۰)=۳\sin ۲\pi x$ داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}k_n\sin n\pi x=۳\sin ۲\pi x\Rightarrow k_n=۲\int_۰^۱ ۳\sin ۲\pi x\sin n\pi x dx$$

---

۱۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

$$u_{xx}=u_{tt}+t^۲-x^۲-t+x\rightarrow u(x,t)=v(x,t)+\psi(x,t)$$

$V(x,t)$ فرض می‌کنیم دارای شرایط مرزی همگن است یعنی:

$$v(۰,t)=v(۱,t)=v_x(۰,t)=v_x(۱,t)=۰$$

محاسبه $\psi(x,t)$:

$$\begin{cases}u_x(۰,t)=\psi_x(۰,t)=a(t)=t\\ u_x(۱,t)=\psi_x(۱,t)=b(t)=t^۲\end{cases}$$

$$\psi(x,t)=\frac{x^۲}{۲l}(b(t)-a(t))+a(t)x=\frac{x^۲}{۲}(t^۲-t)+xt$$

$$v(x,t)=\sum_{h=۱}^{\infty}v_n(t)\sin n\pi x$$

با توجه به شرایط مرزی صفر برای $v(x,t)$ داریم:

شرایط اولیه
$$\begin{cases}u(x,۰)=۰\rightarrow v(x.۰)+\psi(x,۰)=۰\rightarrow v(x,۰)=۰\\ u_t(x,۰)=\frac{-x^۲}{۲}\rightarrow v_t(x,۰)+\psi_t(x,۰)=\frac{-x^۲}{۲}\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow v_t(x,0)=\frac{-x^2}{2}-\left(\frac{x^2}{2}(2t-1)+x\right)\Big|_{t=0}=-x$$

$$u_{xx}=u_{tt}+t^2-x^2-t+x\Rightarrow v_{xx}+\psi_{xx}=v_{tt}+\psi_{tt}+t^2-x^2-t+x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n''(t)+n^2\pi^2v_v(t))\sin n\pi x+t-t^2+x^2+t^2-x^2-t+x=0$$

سری فوریه سینوسی داریم پس:

$$v_n''(t)+n^2\pi^2v_n(t)=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin(\frac{n\pi}{1}x)dx$$

$$=2\int_0^1 -x\sin n\pi x\,dx=-2\left(\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right)_0^1=\frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

جواب عمومی $v_g(t)=A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t$

جواب خاص $v_p(t)=K_n\xrightarrow{\text{با جایگذاری به‌دست می‌آید}}K_n=\frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n$

$$v_n(t)=(A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t)+\frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n$$

A_n و B_n را از شرایط اولیه به دست می آوریم:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\pi t+B_n\sin n\pi t+\frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n)\sin n\pi x$$

$$\begin{cases}v(x,0)=0\Rightarrow\sum(A_n+\frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n)\sin n\pi x=0\Rightarrow A_n=\frac{-2}{n^3\pi^3}(-1)^n\\ v_t(x,0)=-x\Rightarrow\sum(n\pi B_n)\sin n\pi x=-x\end{cases}$$

$$n\pi B_n=2\int_0^1 -x\sin n\pi x\,dx=\frac{2}{n\pi}(-1)^n\Rightarrow B_n=\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{-2}{n^3\pi^3}(-1)^n\cos n\pi t+\frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}\sin n\pi t+\frac{2}{n^3\pi^3}(-1)^n]\sin n\pi x+\frac{x^2}{2}(t^2-t)+xt$$

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

$$u=f(y+x)+g(y-x)$$

در معادلات PDE به شکل کلی:

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=0$$

معادله مشخصه $A\lambda^2+b\lambda+C=$ را تشکیل می‌دهیم. سه حالت مختلف داریم:

اگر دو ریشه λ_1 و λ_2 (نابرابر)داشته باشد:

$$u=f(y+\lambda_1x)+g(y+\lambda_2x)$$

اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف λ باشد:

$$u=f(y+\lambda x)+(k_1x+k_2y)g(y+\lambda x)$$

اگر دارای ریشه یکتا λ باشد:

$$u=f(y+\lambda x)$$

Scanned by CamScanner

بنابراین دراینجا داریم:

$$\lambda_1 = 1 \text{ و } \lambda_2 = -1$$

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$A = 1 \text{ و } B = 0 \text{ و } C = -1 \rightarrow u_{xx} - u_{yy} = 0$$

۱۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

تبدیل فوریه را روی متغیر x اعمال می کنیم:

$$u_t - u_{xx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(\omega,t) - (i\omega)^2 F(\omega,t) = 0 \Rightarrow F_t + \omega^2 F = 0 \Rightarrow F(\omega,t) = A(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

$$u(x,0) = e^{-|x|} \Rightarrow F(\omega,t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega} \Rightarrow F(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}e^{-\omega^2 t}$$

حال از سه نکته در مورد تبدیل فوریه برای به‌دست آوردن $u(x,t)$ استفاده می کنیم:

$$\text{I)}\ F(e^{-\pi x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{\omega}{2\pi})^2}$$

$$\text{II)}\ F(f(ax)) = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

$$\text{III)}\ F(f(x) * g(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)G(\omega)$$

بنابراین داریم:

$$F^{-1}(e^{-\omega^2 t}) = F(e^{4\pi^2 t(-(\frac{\omega}{2\pi}))^2}) = (\frac{1}{4\pi^2 t})(\sqrt{2\pi})e^{-\pi(\frac{1}{4\pi^2 t})^2 x^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{x^2}{16\pi^3 t^2}}$$

$$F^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}) = e^{-|x|} \rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-|x|} * (\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{16\pi^3}(\frac{x}{t})^2})$$

توجه: مبنای تعریف تبدیل فوریه برای این سؤال به‌صورت $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ می‌باشد.

همچنین منظور از (*) کانولوشن دو تابع می‌باشد.

۱۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

چون عاملی که باعث ناهمگن شدن معادله شده $(\sin x)$ تابع x است پس $w(x,t)$ هم تنها تابع x است پس:

$$u(x,t) \triangleq v(x,t) + w(x)$$

$v(x,t)$ همگن است یعنی $v_{tt} = v_{xx}$ و $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$، ابتدا $w(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin x$$

$$v_{tt}=v_{xx}+w''(x)+\sin x \Rightarrow w''(x)=-\sin x \Rightarrow w'(x)=\cos x+k_1 \Rightarrow w(x)=\sin x+k_1x+k_2$$

k_1 و k_2 را از شرایط کرانه‌ای به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+w(0)=0 \Rightarrow w(0)=0 \\ u(\pi,t)=v(\pi,t)+w(\pi)=0 \Rightarrow w(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=0 \Rightarrow w(x)=\sin x$$

$$v_{tt}=v_{xx}$$

اکنون $v(x,t)$ را به‌دست می‌آوریم:

شرایط اولیه
$$\begin{cases} v(x,0)=u(x,0)-w(x)=-\sin x \\ v_t(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $v(0,t)=v(\pi,t)=0$، $v(x,t)$ به صورت کلی زیر است:

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin nx$$

پس:

$$\sum v_n''(t)\sin nx=\sum -n^2 v_n(t)\sin nx \Rightarrow v_n''(t)+n^2 v_n(t)=0$$

$$\Rightarrow v_n(t)=A_n\cos nt+B_n\sin nt \Rightarrow v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin nx$$

A_n و B_n را به کمک شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$v(x,0)=\sum A_n\sin nx=-\sin x$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-\sin x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+1)x-\cos(n-1)x]dx=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)$$

$$v_t(x,0)=\sum nB_n\sin nx=0 \Rightarrow B_n=0$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\right)\cos nt\sin nx$$

بنابراین با به‌دست آمدن $v(x,t)$، $w(x)$ و $u(x,t)$ حاصل می‌شود:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)\cos nt\sin nx\right]+\sin x$$

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۸

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

الف)

$$u_t=u_{xx}+xt\ ,\ u(x,0)=x+2\ ,\ u(0,t)=1\ ,\ u(1,t)=2$$

$$u(x,t)=u_q(x,t)+v(x,t)$$

$u_q(x,t)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند.

$$u_q(x,t)=a(t)x^2+b(t)x+c(t) \Rightarrow u_q(0,t)=c(t)=1 \Rightarrow c(t)=1$$

Scanned by CamScanner

$u_q(1,t)=a(t)+b(t)+c(t)=2 \Rightarrow a(t)+b(t)=2$

فرض کنید: $u_q(x,t)=2x+1$ ، $u_t=u_{xx}+xt \to u_{qt}+v_t=u_{qxx}+v_{xx}+xt$

$$\to \begin{cases} v_t=v_{xx}+xt \\ v(x,0)=u(x,0)-u_q(x,0)=x+2-2x-1=-x+1 \\ v(0,t)=0 \quad , \quad v(1,t)=0 \end{cases}$$

با فرض $v(x,t)=v_p(x,t)+w(x,t)$ که $v_p(x,t)$ در معادله ناهمگن صدق می‌کند، داریم:

$$\text{جواب‌های معادله همگن} \longrightarrow \frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}=\lambda$$

$$X-\lambda X=0 \quad , \quad X(0)=0 \quad , \quad X(1)=0 \Rightarrow X=A\sin(\sqrt{-\lambda}x) \, , \sqrt{-\lambda}=n\pi$$

$$X_n(x)=A_n\sin n\pi x \quad , \quad T_n=B_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

فرض می‌گیریم:

$$X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin n\pi x \Rightarrow C_n(t)=2\int_0^1 \sin n\pi x xt\,dx$$

$$=\frac{2t}{n\pi}\{-\cos(n\pi x)x]_0^1+\int_0^1\cos n\pi x dx\}=\frac{2t}{n\pi}(-\cos n\pi+\frac{\sin n\pi}{n\pi})=\frac{2(-1)^{n+1}t}{n\pi}$$

با فرض $v_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin n\pi x$، با قرار دادن این سری و سری مربوط به xt در معادله، به‌دست می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n'(t)+A_n(t)\pi^2n^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}t}{nx}$$

$$A_n(t)=a_nt+b_n \Rightarrow a_n+(a_nt+b_n)\pi^2n^2=\frac{2(-1)^{n+1}t}{n\pi} \Rightarrow \begin{cases} a_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3n^3} \\ b_n=-\frac{a_n}{\pi^2n^2}=\frac{2(-1)^n}{\pi^5n^5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n(t)=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3n^3}(t-\frac{1}{\pi^2n^2}) \to v_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3n^3}(t-\frac{1}{\pi^2n^2})\sin n\pi x$$

با قرار دادن در معادله داریم:

$$\begin{cases} w_t-w_{xx}=0 \quad , \quad w(0,t)=0 \quad , \quad w(1,t)=0 \\ w(x,0)=v(x,0)-v_p(x,0)=-x+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^5n^5}\sin n\pi x \end{cases}$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-n^2\pi^2t}\sin n\pi x$$

Scanned by CamScanner

$$w(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x=-x+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^5 n^5}\sin n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin n\pi x=(-x+1)\Rightarrow D_n=2\int_0^1(-x+1)\sin n\pi x dx \qquad (x>0)$$

$$\to D_n=\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{2}{n\pi}\{-x\cos n\pi x]_0^1+\int_0^1\cos n\pi x dx\}=\frac{2}{n\pi}$$

$$\to B_n=D_n-\frac{2(-1)^n}{\pi^5 n^5}$$

$$u(x,t)=u_q(x,t)+v_p(x,t)+w(x,t)$$

$$u(x,t)=2x+1+\sum_{n=1}^{\infty}\{[\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}(t-\frac{1}{\pi^2 n^2})+(\frac{2}{n\pi}-\frac{2(-1)^n}{\pi^5 n^5})e^{-\pi^2 n^2 t}]\sin n\pi x\}$$

ب) با فرض $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ به گونه‌ای که

$$w(x,y)=Ax+B\ ,\ w(0,y)=e^{-y}\ ,\ w(1,y)=0$$

داریم: $w(x,y)=e^{-y}(1-x)$ و به مسئله زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}v_{xx}+v_{yy}=(x-1)e^{-y} & ,\ 0<x<1\ ,\ 0<y<\infty\\ v(x,0)=x\ ,\ v(0,y)=0\ ,\ v(1,y)=0\end{cases}$$

به دنبال جوابی به‌صورت $v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(y)\sin n\pi x$ هستیم که در شرایط $v(0,y)=0$ و $v(1,y)=0$ صدق کند. $G_n(y)$ را به گونه‌ای می‌یابیم که در سایر شرایط نیز صدق کند. با قرار دادن در معادله داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{G}_n(y)-n^2\pi^2G_n(y))\sin n\pi x=(x-1)e^{-y}$$

$$\Rightarrow \ddot{G}_n(y)-n^2\pi^2G_n(y)=2\int_0^1(x-1)e^{-y}\sin n\pi x dx=-\frac{2}{n\pi}e^{-y}$$

$$\Rightarrow G_n(y)=A_ne^{n\pi y}+B_ne^{-n\pi y}+G_n^*(y)$$

که $G_n^*(y)$، جواب خصوصی معادله است و برابر است با

$$G_n^*(y)=\frac{2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}e^{-y}$$

A_n نیز برابر با صفر است. چرا که $G_n(y)$ وقتی y به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، باید حد داشته باشد و برای تعیین B_n از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$v(x,0)=x=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n+\frac{2}{n\pi(n^2\pi^2-1)})\sin n\pi x$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow B_n=\frac{-2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}+2\int_0^1 x\sin n\pi x dx=\frac{-2}{nx(n^2\pi^2-1)}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=e^{-y}(1-x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{-2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)e^{-n\pi y}\right)+\frac{2}{n\pi(n^2\pi^2-1)}e^{-y}\right)\sin n\pi x$$

۲۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

الف)

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$F(w,y)=F\{u(x,y)\}\Rightarrow -w^2F+F_{yy}=0\Rightarrow F=c_1e^{|w|y}+c_2e^{-|w|y}$$

با توجه به اینکه $u(x,y)$ کراندار است و در $y\to\infty$ نباید ∞ شود پس:

$$F=ce^{-|w|y}$$

c می‌تواند ثابت و یا تابع x باشد. برای به‌دست آوردن آن از شروط استفاده می‌کنیم.

$$u_x(0,y)=0\Rightarrow F\{u_x(0,y)\}=jwF(w,y)\Big|_{w=0}=0$$

حال با توجه به این که $F^{-1}\{e^{-|w|y}\}=\frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}$، داریم:

$$u(x,y)=\frac{1}{(x^2+1)^2}.\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z^2+1)^2}\frac{y}{\pi((x-z)^2+y^2)}dz$$

ب) در این مسئله به جستجوی جوابی به‌صورت روبرو می‌پردازیم:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin n\pi x$$

با قرار دادن آن در معادله اصلی می‌یابیم:

$$u_{tt}-u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}(\ddot{G}_n(t)+n^2\pi^2G_n(t))\sin n\pi x=0$$

$$\Rightarrow \ddot{G}_n(t)+n^2\pi^2G_n(t)=0\Rightarrow G_n(t)=a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi t+b_n\sin n\pi t)\sin n\pi x$$

از شرایط اولیه داریم:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi t=\sin n\pi\Rightarrow a_1=1\ ,\ a_n=0\ ,\ n\geq 2$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n n\pi\sin n\pi x=-\sin\pi x\Rightarrow b_1\pi=-1\ ,\ b_n n\pi=0\ ,\ n\geq 2\Rightarrow\begin{cases}b_1=-\frac{1}{\pi}\\ b_n=0\ ,\ n\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=(\cos\pi t-\frac{1}{\pi}\sin\pi t)\sin\pi t$$

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$$

$$u(r,0)=u(r,\pi)=u(2,\theta)=0 \quad , \quad u(1,\theta)=\sin\theta \quad , \quad 1<r<2$$

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\Rightarrow r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda$$

(با توجه به این که $\Theta(\theta)$ باید با دوره تناوب 2π متناوب باشد)

$$\Theta(\theta)=A\cos\sqrt{\lambda}\theta+B\sin\sqrt{\lambda}\theta \quad , \quad \sqrt{\lambda}=n \quad , \quad n=1,2,3,\ldots$$

$$R(r)=Cr^{\sqrt{\lambda}}+Dr^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$u(r,\theta)=0\Rightarrow\Theta(0)=0\Rightarrow A_n=0$$

$u(r,\pi)=0\Rightarrow B_n\sin n\pi=0\Rightarrow$ برقرار است

$$u(2,\theta)=0\Rightarrow C_n2^n+D_n2^{-n}=0\Rightarrow D_n=-4^nC_n$$

$$u(1,\theta)=\sin\theta\Rightarrow C_n+D_n=1 \quad , \quad \sum B_n\sin(n\theta)=\sin\theta\Rightarrow B_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq1\end{cases}$$

$$n=1\Rightarrow\begin{cases}C+D=1\\ D=-4C\end{cases}\Rightarrow C=-\frac{1}{3} \quad , \quad D=+\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow u(r,\theta)=(-\frac{1}{3}r+\frac{4}{3r})\sin\theta$$

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

الف) از تبدیل فوریه متناهی سینوسی نسبت به متغیر x استفاده می‌کنیم. هرگاه $F_s\{u(x,t)\}=v(n,t)$ تبدیل فوریه سینوسی تابع $u(x,t)$ باشد. یعنی:

$$v(n,t)=F_s\{u(x,t)\}=\frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad , \quad L=1$$

$$\Rightarrow F\{u_{xx}\}=\frac{2n\pi}{L^2}\{(-1)^{n+1}u(L,t)+u(0,t)\}-\frac{n^2\pi^2}{L^2}v(n,t)$$

آنگاه:

$$F\{u_{xx}\}=F\{u_{tt}\}-F\{\sin\pi x.\sin\alpha t\}$$

از این‌رو:

$$-n^2\pi^2v(n,t)=v_{tt}(n,t)-\sin\alpha t(2\int_0^1\sin\pi x\sin n\pi x dx)=v_{tt}(n,t)-\sin\alpha t\times\begin{pmatrix}0 & n\neq1\\ \frac{1}{2} & n=1\end{pmatrix}$$

$$v(n,0)=F\{u(x,0)\}=0 \quad , \quad v_t(n,0)=F\{u_t(x,0)\}=0$$

مسئله را برای هر دو حالت $n\neq1$ و $n=1$ جداگانه حل می‌کنیم:

Scanned by CamScanner

$$n=1:\ -\pi^2 v(1,t)=v_{tt}(1,t)-\frac{1}{2}\sin\alpha t \to v_{tt}+\pi^2 v=\frac{1}{2}\sin\alpha t\ ,\ v(1,0)=0\ ,\ v_t(1,0)=0$$

این معادله دارای جواب عمومی به‌صورت زیر است:

$$v(1,t)=a_1\sin\pi t+b_1\cos\pi t+\frac{1}{2(\pi^2-\alpha^2)}\sin\alpha t$$

با توجه به شرایط اولیه a_1 و b_1 را تعیین می‌کنیم:

$$v(1,0)=b_1=0\ ,\ v_t(1,0)=a_1\pi+\frac{\alpha}{2(\pi^2-\alpha^2)}=0\Rightarrow a_1=\frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2-\pi^2)}$$

$$\Rightarrow v(1,t)=\frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2-\pi^2)}\sin\pi t+\frac{1}{2(\pi^2-\alpha^2)}\sin\alpha t$$

$$n\neq 1:\quad v_{tt}+n^2\pi^2 v=0\ ,\ v(n,0)=0\ ,\ v_t(n,0)=0$$

این معادله جوابی به‌صورت $v(n,t)=a_n\sin n\pi t+b_n\cos n\pi t$ دارد. از شرایط اولیه داریم:

$$v(n,0)=b_n=0\ ,\ v_t(n,0)=a_n n\pi=0\Rightarrow a_n=0$$

بنابراین داریم:

$$v(n,t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{2\pi(\pi^2-\alpha^2)}\sin\alpha t+\dfrac{1}{2(\pi^2\alpha^2)}\sin\alpha t & ,\quad n=1\\ 0 & \quad n\neq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=F\{v(n,t)\}=\sum_{n=1}^{\infty}v(n,t)\sin n\pi x$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\Big(\frac{\alpha}{2\pi(\alpha^2-\pi^2)}\sin\pi t+\frac{1}{2(\pi^2-\alpha^2)}\sin\alpha t\Big)\sin\pi x$$

ب) $$u_t-u_{xx}=\begin{cases}2t-1 & 0<x<\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}\ ;\ u(x,0)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & x>1\end{cases}\ ;\ u_x(0,t)=0$$

در حالت $x>\pi$ به وضوح $u(x,t)=0$. بنابر یکتایی جواب، جواب این معادله است. پس حالت $x<\pi$ را در نظر می‌گیریم. تبدیل فوریه کسینوسی نسبت به x را می‌نویسیم:

$$F_c(u(x,t))=u(t)$$

$$\Rightarrow u_t-\frac{2}{\pi}\Big[(-1)^n u'(\pi,t)-u'(0,t)\Big]-n^2u=2t-1\Rightarrow u_t-n^2u=2t-1$$

$$\Rightarrow u(t)=ce^{n^2t}-\frac{(2t-1)}{n^2}+\frac{2}{n^4}\ ,\ u(x,0)=0\Rightarrow u(0)=0$$

$$\Rightarrow c+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}=0\Rightarrow c=\frac{-1}{n^2}-\frac{2}{n^4}\Rightarrow u(t)=\Big(-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^4}\Big)e^{n^2t}-\frac{(2t-1)}{n^2}+\frac{2}{n^4}$$

۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

معادله را به یک معادله همگن تبدیل می‌کنیم:

$$u(x,t)=F(x)G(t)\rightarrow\begin{cases}F''(x)-kF(x)=0\\G''(t)-4kG(t)=0\end{cases}$$

تنها جواب غیر بدیهی به ازای $k=-\mu^2<0$ می‌باشد.

$$\rightarrow \mu_n=\frac{n\pi}{2}\rightarrow F_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{2}\qquad n=1,2,3$$

$$\lambda_n^2=\frac{4n^2\pi^2}{4}=n^2\pi^2\rightarrow G_n(t)=C_n\cos\lambda_n t+D_n\sin\lambda_n t$$

سرعت اولیه نداریم $\rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-2t)+f(x+2t)]$

$$\rightarrow u(x,t)=\frac{1}{2}\{[6\sin\pi(x-2t)-3\sin4\pi(x-2t)]+[6\sin\pi(x+2t)-3\sin4\pi(x+2t)]\}$$

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$\frac{1}{2}xt=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(t)\sin nx\rightarrow h_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}xt\sin nx\,dx=\frac{t}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(G_n'(t)+n^2G_n(t))\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

$$\rightarrow G_n'(t)+n^2G_n(t)=\frac{t}{n}(-1)^{n+1}\rightarrow G_n(t)=Ce^{-n^2t}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}(t-\frac{1}{n^2})$$

$$u(x,0)=\sin 3x=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin nx\Rightarrow G_3(t)=1$$

$$\rightarrow G_3(t)=1=Ce^{-9t}+\frac{t-\frac{1}{9}}{27}\rightarrow C=e^{9t}(\frac{244}{243}-\frac{9t}{27})$$

$$\rightarrow G_n(t)=e^{9t}(\frac{244}{243}-\frac{t}{27})e^{-n^2t}+\frac{t}{n^3}(-1)^{n+1}$$

۲۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$u(x,y)=F(x)G(y)\rightarrow x^2F''G+xF'G+FG''=0\rightarrow \underbrace{\frac{x^2F''}{F}+\frac{xF'}{F}}_{\text{تابع } x}=\underbrace{-\frac{G''}{G}}_{\text{تابع } y}=\underbrace{k}_{\text{ثابت}}$$

$$\frac{x^2F''}{F}+\frac{xF'}{F}=k\rightarrow x^2F''+xF'-kF=0\qquad(1)$$

معادله دیفرانسیل فوق، یک معادله مرتبه دوم همگن از نوع کشی- اویلر می‌باشد.

$G'' + kG = 0$ (۲)

برای k سه حالت وجود دارد:

$I)\ k = 0 \rightarrow G \equiv 0 \rightarrow u \equiv 0$ جواب بدیهی

$II)\ k = \mu^2 > 0 \rightarrow G(y) = A\cos\mu y + B\sin\mu y$

$x^2F'' + xF' - \lambda F = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 1) + \lambda - k = 0 \rightarrow \lambda^2 - k = 0 \rightarrow \lambda^2 - \mu^2 = 0$

$\rightarrow F(x) = Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}$

$III)\ k = -\mu^2 < 0 \rightarrow G(y) = Ae^{\mu y} + Be^{-\mu y}$

$\lambda^2 + \mu^2 = 0 \rightarrow F(x) = C\sin\mu x + D\cos\mu x$

$\xrightarrow{II} u(x,y) = (A\cos\mu y + B\sin\mu y)(Ce^{\mu x} + De^{-\mu x})$

$\xrightarrow{III} u(x,y) = (Ae^{\mu y} + Be^{-\mu y})(C\sin\mu x + D\cos\mu x)$

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

الف) به دنبال جوابی به‌صورت $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin \pi x$ هستیم. این جواب در دو شرط کرانه‌ای صدق می‌کند و $G_n(t)$ را به گونه‌ای می‌یابیم که در سایر شرایط نیز صادق باشد. با قرار دادن در معادله داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\dot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t))\sin nx = 0$$

$$\Rightarrow \dot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t) = 0 \Rightarrow G_n(t) = a_n e^{-4n^2 t} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-4n^2 t}\sin nx$$

برای یافتن a_n، از شرط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = -\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 2 \\ -\frac{1}{2} & n = 2 \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = -\frac{1}{2}e^{-16t}\sin 2x$$

ب)

$$L[u(x,t)] = U(x,S) \rightarrow SU - u(x,0) = \frac{1}{S} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - SU = -\frac{1}{S}$$

$$\rightarrow U(x,S) = A(S)e^{\sqrt{S}x} + B(S)e^{-\sqrt{S}x} + \frac{1}{S^2}$$

$$U(0,S) = \frac{1}{S^2} = U(\pi,S) \rightarrow A = B = 0 \rightarrow U(x,S) = \frac{1}{S^2} \rightarrow u(x,t) = t$$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

الف)

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + SU - u(x,0) = \frac{x}{S^2} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{S}{x}U = \frac{1}{S^2}$$

$$U(x,S)=\frac{1}{x^S}\{C+\frac{x^{S+1}}{S^2(S+1)}\}$$

$$U(0,S)=0\to C=0\to U(x,S)=\frac{x}{S^2(S+1)}\to u(x,t)=x(e^{-t}+t-1)$$

ب) چون $u(0,t)=0$ داریم، پس F_s می‌گیریم:

$$\hat{u}(h,t)=\int_0^\infty u(x,t)\sin\lambda x dx$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt}=\lambda u(0,t)-\lambda^2\hat{u}=-\lambda^2\hat{u}\to\hat{u}=Ce^{-\lambda^2 t}$$

$$\hat{u}(\lambda,0)=C=F_s\left(f(x)\right)=\int_0^\infty f(x)\sin\lambda x dx\to\hat{u}(\lambda,t)=(\int_0^\infty f(x)\sin\lambda x dx)e^{-\lambda^2 t}$$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(\int_0^\infty f(x)\sin\lambda x dx)e^{-\lambda^2 t}\sin\lambda x dx$$

۳۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

حل به روش تفکیک متغیرها:

$$u(x,t)=f(x).g(t)\to\begin{cases}u_t=g'(t).f(x)\\u_{xx}=f''(x).g(t)\end{cases}\to g'(t)f(x)=f''(x)g(t)\to\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=k$$

اکنون باید بر روی حالات k بحث کنیم:

۱) $k=0$

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=k=0\Rightarrow\begin{cases}g'(t)=0\to g(t)=A\\f''(x)=0\to f(x)=A'x+B'\end{cases}$$

$$\to u(x,t)=f(x).g(t)=A(A'x+B')$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)}u(0,t)=0\Rightarrow A(B')=0\to\begin{cases}A=0\to(A\neq 0)\\\text{یا}\\B'=0\end{cases}$$

A نباید صفر باشد. اگر صفر باشد یعنی $g(t)$ برابر صفر است و به تبع آن طبق فرمول $u(x,t)=f(x).g(t)$، $u(x,t)$ هم صفر خواهد شد.

$$\xrightarrow{(2)}u(1,t)=0\Rightarrow A(A')=0\to\begin{cases}A\neq 0\\A'=0\end{cases}$$

دیدیم که هم A' و هم B' برابر صفر شدند. پس $f(x)=A'x+B'=0$ و این قابل قبول نیست. چون به تبع صفر شدن $f(x)$، $u(x,t)$ هم صفر خواهد شد.

۲) $k>0\ ,\ k=P^2$

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=k=P^2\to g'(t)-P^2g(t)=0$$

Scanned by CamScanner

$$\to (D-P^2)g(t)=0 \to D=P^2 \quad , \quad g(t)=A.e^{P^2t}$$

$$\to \frac{f''(x)}{f(x)}=P^2 \to f''(x)-P^2f(x)=0 \to (D^2-P^2)f(x)=0 \to D=\pm P$$

$$\Rightarrow f(x)=A'e^{Px}+B'e^{-Px} \Rightarrow u(x,t)=f(x).g(t)=(Ae^{P^2t})\ (A'e^{Px}+B'e^{-Px})$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$u(0,t)=0 \to (Ae^{P^2t})(A'+B)=0 \to \begin{cases} g(t)=Ae^{P^2t}\neq 0 \\ A'+B'=0 \to A'=-B' \end{cases}$$

$$u(1,t)=0 \to (Ae^{P^2t})(A'e^{P}+B'e^{-P})=0 \Rightarrow Ae^{P^2t}\neq 0$$

$$A'e^{P}+B'e^{-P}=0 \xrightarrow{A'=-B'} A'e^{P}-A'e^{-P}=0 \to (e^{P})^2=1 \to 2P=0 \to P=0$$

اگر $P=0$ باشد آنگاه $k=P^2=0$ که صفر بودن k را قبلاً رد کرده‌ایم.

۳) $k<0\ ,\ k=-P^2$

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f''(x)}{f(x)}=-P^2 \to g'(t)+P^2g(t)=0 \to (D+P^2)g(t)=0 \to D=-P^2 \ ,\ g(t)=Ae^{-P^2t}$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=-P^2 \to f''(x)+P^2f(x)=0 \to (D^2+P^2)f(x)=0 \to D=\pm iP$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(A'\cos Px+B'\sin Px\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=f(x).g(t)=(Ae^{-P^2t})(A'\cos Px+B'\sin Px)$$

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)} u(0,t)=0 \to (Ae^{-P^2t})(A')=0 \to \begin{cases} Ae^{-P^2t}=g(t)\neq 0 \\ A'=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)} u(1,t)=0 \to (Ae^{-P^2t})(B'\sin P)=0 \to \begin{cases} Ae^{-P^2t}=g(t)\neq 0 \\ B'\sin P=0 \to \begin{cases} B'\neq 0 \\ \sin P=0 \to P=n\pi ; n\in\mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=Ae^{-(n^2\pi^2)t}\left(B'\sin n\pi x\right) \ ;\ n\in\mathbb{N}$$

$$\to u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(B_n)\sin(n\pi x)e^{-(n^2\pi^2)t}$$

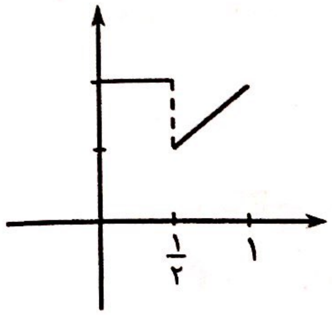
$$\Rightarrow u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leq x<\frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2}\leq x<1 \end{cases}=\sum_{n=1}^{+\infty}(B_n)\sin n\pi x$$

با توجه به این سری فوریه مشخص می‌شود که $L = ۱$ است. پس تابع $f(x)$ آن باید متناوب با دوره تناوب $T = ۲$ باشد. این یعنی این‌که $f(x)$ می‌تواند یکی از دو حالت زیر را داشته باشد:

۱- طول بازه $f(x)$ باید ۲ باشد.

۲- تابع $f(x)$ در بازه (۰ و ۱-) هم تعریف شده باشد.

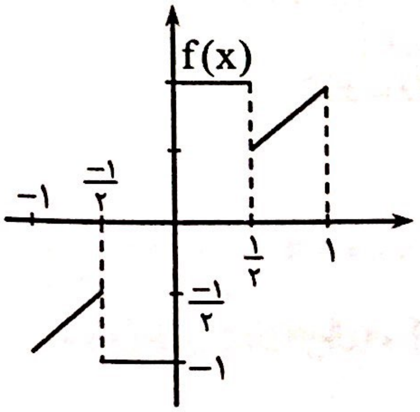
واضح است که $f(x)$ هیچ‌کدام از این حالات را ندارد. پس نتیجه می‌گیریم که این سری، سری فوریه سینوسی $f(x)$ است. حال باید سری فوریه سینوسی $f(x)$ را به دست آوریم و B_n را مشخص کرد.



$$u(x,۰) = f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \\ x & \frac{۱}{۲} \le x < ۱ \end{cases}$$

۱- ابتدا تابع $\tilde{f}(x)$ را از روی تابع $f(x)$ به گونه‌ای می‌سازیم که متقارن نسبت به مبدأ مختصات باشد و $\tilde{f}(x) = f(x)$ و $\forall x \in (۰,۱)$

۲- اکنون بسط فوریه تابع $\tilde{f}(x)$ را می‌نویسیم و می‌دانیم که برای $\tilde{f}(x)$، ضرایب a_n همگی صفر هستند.



$$B_n = \frac{۱}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x).\sin(\frac{n\pi x}{L})dx$$

$$= \int_{-۱}^{۱} \underbrace{\underbrace{\tilde{f}(x)}_{\text{فرد}}.\underbrace{\sin n\pi x}_{\text{فرد}}}_{\text{زوج}} dx = ۲\int_{۰}^{۱} \tilde{f}(x)\sin n\pi x dx$$

$$= ۲(\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sin n\pi x dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\sin n\pi x dx) = I_۱ + I_۲$$

$$I_۱ = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \sin n\pi x dx = \frac{-۱}{n\pi}\cos n\pi x \Big|_{۰}^{\frac{۱}{۲}} = (\frac{-۱}{n\pi})(\cos\frac{n\pi}{۲} - ۱)$$

$$I_۲ = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x\sin n\pi x dx = \frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x \Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱} + \frac{۱}{n^۲\pi^۲}\sin n\pi x \Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱}$$

$$I_۱ + I_۲ = \frac{-۱}{n\pi}\cos n\pi + \frac{۱}{۲n\pi}\cos\frac{n\pi}{۲} + \frac{۱}{n^۲\pi^۲}\sin n\pi - \frac{۱}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}$$

$$= \frac{-۱}{n\pi}\cos n\pi + \frac{۱}{۲n\pi}\cos\frac{n\pi}{۲} - \frac{۱}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow B_n = ۲(\frac{-۱}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{۲} + \frac{۱}{n\pi} - \frac{۱}{n\pi}\cos n\pi + \frac{۱}{۲n\pi}\cos\frac{n\pi}{۲} - \frac{۱}{n^۲\pi^۲}\sin\frac{n\pi}{۲})$$

Scanned by CamScanner

$$=2\left(\frac{-1}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi-\frac{1}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

با داشتن B_n، $u(x,t)$ حاصل می‌شود.

۳۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

$$u(x,t)=F(x)G(t)\Rightarrow\frac{1}{4}F(x)\ddot{G}(t)+F(x)\dot{G}(t)=F''(x)G(t)\Rightarrow\frac{1}{4}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)}+\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}=\frac{F''(x)}{F(x)}=k$$

اگر $k>0\Rightarrow k=p^2\Rightarrow F''(x)-p^2F(x)=0\Rightarrow F(x)=Ae^{px}+Be^{-px}$

$$\begin{cases}u(0,t)=F(0)G(t)=0\Rightarrow F(0)=0\Rightarrow A+B=0\\ u(\pi,t)=F(\pi)G(t)=0\Rightarrow F(\pi)=0\Rightarrow Ae^{p\pi}+Be^{-p\pi}=0\end{cases}\Rightarrow A(e^{p\pi}-e^{-p\pi})=2A\sinh(p\pi)=0$$

$\Rightarrow A=0\Rightarrow B=0\Rightarrow F(x)=0\Rightarrow$ پس k مثبت نیست

اگر $k=0\Rightarrow F''(x)=0\Rightarrow F(x)=Ax+B$

$$\begin{cases}F(0)=0\Rightarrow B=0\Rightarrow F(x)=Ax\\ F(\pi)=0\Rightarrow A\pi=0\Rightarrow A=0\end{cases}\Rightarrow F(x)=0\Rightarrow$$ پس k صفر هم نیست

اگر $k<0\Rightarrow k=-p^2\Rightarrow F''(x)+p^2F(x)=0\Rightarrow F(x)=A\cos px+B\sin px$

$$\begin{cases}F(0)=0\Rightarrow A=0\Rightarrow F(x)=B\sin px\\ F(\pi)=0\Rightarrow B\sin p\pi=0\Rightarrow p=n\end{cases}\Rightarrow F_n(x)=\sin nx\qquad n=1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)}+\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}=k=-p^2=-n^2\Rightarrow\ddot{G}(t)+4\dot{G}(t)+4n^2G(t)=0$$

$$\lambda^2+4\lambda+4n^2=0\Rightarrow\lambda=-2\pm\sqrt{4(1-n^2)}=-2\pm2i\sqrt{n^2-1}$$

$$\Rightarrow G_n(t)=e^{-2t}\left[A_n\cos(2\sqrt{n^2-1}\,t)+B_n\sin(2\sqrt{n^2-1}\,t)\right]$$

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)\quad,\quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\sin nx$$

$$\Rightarrow u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(0)\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx=x$$

$$\Rightarrow A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\times\frac{-\pi}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dG_n(t)}{dt}\sin nx\Rightarrow u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left.\frac{dG_n(t)}{dt}\right|_{t=0}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n-2A_n)\sin nx=e^{-x}$$

$$\Rightarrow B_n - ۲A_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} e^{-x}\sin nx\,dx = \frac{-۲e^{-x}}{\pi(n^۲+۱)}(n\cos nx + \sin nx)\Big]_{۰}^{\pi}$$

$$= \frac{۲}{\pi(n^۲+۱)}[n(۱-e^{-\pi}\cos n\pi)] = \frac{۲n(۱+(-۱)^{n+۱}e^{-\pi})}{\pi(n^۲+۱)} \Rightarrow B_n = \frac{۴}{n}(-۱)^{n+۱} + \frac{۲n[۱+(-۱)^{n+۱}e^{-\pi}]}{\pi(n^۲+۱)}$$

۳۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

از تبدیل فوریه سینوسی نسبت به متغیر x که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم:

$$F_s\{u(x,t)\} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} u(x,t)\sin\omega x\,dx = F_s(\omega,t)$$

$$\Rightarrow F_s\{u_{xx}(x,t)\} = -\omega^۲ F_s(\omega,t) + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega u(۰,t) \quad , \quad F_s\{u_t(x,t)\} = \frac{\partial}{\partial t}F_s(\omega,t)$$

چون te^{-t} که برحسب x، یک ثابت است، مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست، بنابراین با استفاده از تبدیل $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$، $w(x,t)$ را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم تا به معادله همگن برسیم که قابل حل از طریق تبدیل فوریه است:

$$W_t - ۴W_{xx} = te^{-t}$$

با فرض $W_{xx} = ۰$:

$$W = -te^{-t} - e^{-t}$$

بنابراین به معادله روبرو برای $v(x,t)$ می‌رسیم:

$$v_t - ۴v_{xx} = ۰$$

$$v(x,۰) = e^{-x} \quad , \quad v(۰,t) = -te^{-t} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} v(x,t) = \lim_{x\to\infty} v_x(x,t) = te^{-t} + e^{-t}$$

از تبدیل فوریه سینوسی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_s(\omega,t) + ۴w^۲F_s(\omega,t) = -۴\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega te^{-t} \qquad (۱)$$

برای یافتن شرایط اولیه برای معادله دیفرانسیل معمولی بالا:

$$F_s(\omega,۰) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,dx \Rightarrow F_s(\omega,۰) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\frac{\omega}{۱+\omega^۲}\right) \qquad (۲)$$

جواب خصوصی و همگن معادله دیفرانسیل (۱) با شرایط اولیه (۲) را می‌یابیم. جواب خصوصی به‌صورت زیر است:

$$F_{sp}(\omega,t) = \big(A(\omega)t + B(\omega)\big)e^{-t}$$

با جایگذاری در (۱) داریم:

$$A(\omega) = ۴\omega^۲ + ۴\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega \quad , \quad B(\omega) = \frac{۴(\omega^۲ + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega)}{۱-۴\omega^۲}$$

جواب همگن به صورت $\alpha(\omega)e^{-۴\omega^۲}$ خواهد بود که با توجه به (۲) داریم:

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{۱+\omega^۲} - \frac{۴(\omega^۲ + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega)}{۱-۴\omega^۲}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow F_s(\omega,t)=\frac{\omega}{1+\omega^2}e^{-4\omega^2 t}-\frac{4(\omega^2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega)}{1-4\omega^2}e^{-4\omega^2 t}+\frac{4(\omega^2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega)}{1-4\omega^2}te^{-t}+\frac{4(\omega^2+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega)}{1-4\omega^2}e^{-t}$$

و بنابراین:

$$u(x,t)=-te^{-t}-e^{-t}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega,t)\sin\omega x\,d\omega$$

۳۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

الف) چون $u_x(0,t)=0$ داریم، پس F_s می‌گیریم:

$$\int_0^\infty u_x\cos\lambda x dx=\int_0^\infty 4u_{xx}\cos\lambda x dx \quad , \quad \hat{u}(\lambda,t)=\int_0^\infty u(x,t)\cos\lambda x dx$$

$$\frac{d\hat{u}}{dt}=4[-\lambda u_x(0,t)-\lambda^2\hat{u}]=-4\lambda^2\hat{u}\to\hat{u}(\lambda,t)=Ce^{-4\lambda^2 t}$$

$$\hat{u}(\lambda,0)=C=\int_0^\infty e^{-5x}\sin\lambda x dx=\frac{\lambda}{\lambda^2+25}\to\hat{u}(\lambda,t)=\frac{\lambda}{\lambda^2+25}e^{-4\lambda^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda}{\lambda^2+25}e^{-4\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda$$

ب)

$$L[u(x,t)]=u(x,S)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2x(Su-u(x,0))=\frac{2x}{S}\to\frac{\partial u}{\partial x}+2xSu=\frac{2x}{S}+2x=2x(1+\frac{1}{S})$$

$$\to u(x,S)=Ce^{-Sx^2}+\frac{1}{S}(1+\frac{1}{S})$$

$$u(0,S)=\frac{1}{S}\to C+\frac{1}{S}(1+\frac{1}{S})=\frac{1}{S}\to C=\frac{1}{S}(1-1-\frac{1}{S})=-\frac{1}{S^2}$$

$$\to u(x,S)=\frac{-e^{-Sx^2}}{S^2}+\frac{1}{S}(1+\frac{1}{S})\to u(x,t)=u_{x^2}(t)(t-x^2)+1+t$$

۳۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

$$u_{yx}+2xu_y=2x\to\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial y}=2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})+2x\frac{\partial u}{\partial y}=2x\to\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})=(2x)(1-\frac{\partial u}{\partial y})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=v\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2x(1-v)\to\frac{\partial v}{1-v}=2x\partial x\to\frac{-\partial v}{v-1}=2x\partial x$$

$$\Rightarrow -\ln(v-1)=x^2+c_1\to\frac{1}{v-1}=e^{x^2+c_1}\to v-1=\frac{1}{e^{x^2+c_1}}\Rightarrow v=\frac{1}{e^{x^2+c_1}}+1\ ,\quad v=\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{e^{x^2+c_1}}+1\to\partial u=(\frac{1}{e^{x^2+c_1}}+1)\partial y\Rightarrow u=y(\frac{1}{e^{x^2+c_1}}+1)+c_2$$

بررسی جواب:

$$\begin{cases} u_{yx}=\dfrac{-2x}{e^{x^2+c_1}} \\ u_y=\dfrac{1}{e^{x^2+c_1}}+1 \end{cases} \rightarrow \frac{-2x}{e^{x^2+c_1}}+2x\left(\frac{1}{e^{x^2+c_1}}+1\right)=2x$$

۳۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

$$u(x,y)=F(x)G(y)\rightarrow F''G+G''F=0\rightarrow \frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=k\rightarrow G''+kG=0$$

$1)k=0\rightarrow G(y)=Ay+B\rightarrow u(x,0)=u(x,1)=0\rightarrow G(0)=G(1)=0\rightarrow G\equiv 0\rightarrow U\equiv 0$ جواب بدیهی

$2)k=-\mu^2<0\rightarrow G(y)=Ae^{\mu y}+Be^{-\mu y}\rightarrow A=B=0\rightarrow G\equiv 0\rightarrow U\equiv 0$ جواب بدیهی

$3)k=\mu^2>0\rightarrow G(y)=A\cos\mu y+B\sin\mu y\Rightarrow G(0)=0\rightarrow A=0$

$G(1)=0\rightarrow B\sin\mu=0\rightarrow B=0\rightarrow G\equiv 0\rightarrow U\equiv 0$ جواب بدیهی

با فرض $B\neq 0$ $\rightarrow \sin\mu=0\rightarrow \mu_n=n\pi\ ,\ n=1,2,\ldots\rightarrow G(y)=B_n\sin n\pi y\ ,\ n=1,2,\ldots$

$F''-kF=0\ \rightarrow F(x)=C_ne^{\mu x}+D_ne^{-\mu x}$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_ne^{\mu x}+\beta_ne^{-\mu x})\sin n\pi y$$

$$u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)\sin n\pi y=0\rightarrow \alpha_n+\beta_n=0$$

$$u(\pi,y)=3\sin(5\pi y)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_ne^{\mu x}+\beta_ne^{-\mu x})\sin n\pi y$$

$\alpha_ne^{\mu\pi}+\beta_ne^{-\mu\pi}$ ضرایب فوریه فرد $3\sin(5\pi y)$ هستند.

$$\alpha_ne^{\mu\pi}+\beta_ne^{-\mu\pi}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}3\sin 5\pi y\sin n\pi y dy=\frac{3}{\pi^2}\left[\frac{\sin(\pi^2(5-n))}{5-n}-\frac{\sin(\pi^2(5+n))}{5+n}\right]$$

۳۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$F\{u_t\}=F\{u_{xx}\}+F\{u\}\Rightarrow F_t=-\omega^2F+F\ \Rightarrow\ F_t+(\omega^2-1)F=0$$

$$F\{u(x,0)\}=F(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-1}^{0}-e^{-i\omega x}dx+\int_0^1 e^{-i\omega x}dx\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}i\left(\frac{\cos\omega-1}{\omega}\right)$$

$$F(\omega,t)=Ae^{(1-\omega^2)t}\ \Rightarrow F(\omega,0)=A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}i\frac{\cos\omega-1}{\omega}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}i\frac{\cos\omega-1}{\omega}e^{(1-\omega^2)t}e^{i\omega x}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x e^{(1-\omega^2)t}d\omega$$

Scanned by CamScanner

۳۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$u_{tt}=u_{xx}\quad ,\quad 0<x<\pi\quad ,\quad t>0$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=2\quad ,\quad t\geq 0$$
$$u(x,0)=x\quad ,\quad u_t(x,0)=0\quad ,\quad 0<x<\pi$$
$$U(x,t)=X(x)T(t)\to\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

(چون یک طرف فقط تابع x و طرف دیگر فقط تابع t است، باید هر دو برابر با یک مقدار ثابت باشند.)

$$\lambda=0\ \to\ T(t)=At+B\quad ,\quad X(x)=A'x+B'$$
$$\left.\begin{array}{l}u(0,t)=u(\pi,t)=2\Rightarrow A'=0\\ u_t(x,0)=0\Rightarrow T'(t)=0\Rightarrow A=0\end{array}\right\}\Rightarrow u(x,t)=\text{ثابت}=2$$

جواب بالا در شرط $u(x,0)=x$ صدق نمی‌کند اما با تغییر متغیر $u(x,t)=w(x,t)+v(x,t)$ که $v(x,t)=2$،
در معادله دیفرانسیل و همه شرایط جز $v(x,0)=x$ صدق می‌کند، می‌توان مسئله را برای w ساده‌تر کرد.

$$\begin{cases}w_{tt}=w_{xx}\\ w(0,t)=w(\pi,t)=0\quad ,\quad w_t(x,0)=0\\ w(x,0)=u(x,0)-v(x,0)=x-2\end{cases}$$

$$\lambda<0\Rightarrow\lambda=-k^2\Rightarrow\begin{cases}T(t)=C_1\cos kt+C_2\sin kt\\ X(x)=C_3\cos kx+C_4\sin kx\end{cases}$$

$$w(0,t)=0\Rightarrow C_3=0\quad ,\quad w(\pi,t)=0\Rightarrow X(\pi)=0\Rightarrow\sin k\pi=0\Rightarrow k\in\mathbb{Z}$$

$$w_t(x,0)=0\Rightarrow C_2=0\Rightarrow w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos kt\sin kx$$

$$w(x,0)=x-2\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin kx=x-2\quad ,\quad 0<x<\pi$$

$$\Rightarrow C_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-2)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{-x}{k}\cos kx\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx+\frac{2}{k}\cos kx\Big]_0^{\pi}\Big\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{k}\cos k\pi+\frac{2}{k}(\cos k\pi-1)\right]=\frac{-2}{k\pi}(1+(\pi-2)(-1)^k)$$
$$\Rightarrow u(x,t)=2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(1+(\pi-2)(-1)^k)\cos kt\sin kx$$

۳۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$u_{tt}=4u_{xx}\quad ,\quad u(0,t)=0\quad ,\quad u(\pi,t)=0$$
$$u(x,0)=\sin 5x+\sin 4x\quad ,\quad u_t(x,0)=0$$

$$u(x,t)=X(x)T(t)\Rightarrow \frac{T''}{T}=۴\frac{X''}{X}=\lambda$$

$$\lambda<۰\Rightarrow\begin{cases}X(x)=A\cos(\sqrt{-\lambda}x)+B\sin(\sqrt{-\lambda}x)\\ T(t)=C\cos(\sqrt{-\lambda}t)+D\sin(\sqrt{-\lambda}t)\end{cases}$$

$$u(۰,t)=۰\Rightarrow A=۰\quad,\quad u(\pi,t)=۰\Rightarrow X(\pi)=۰\Rightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}\pi)=۰$$

$$\Rightarrow\sqrt{-\lambda}\pi=n\pi\Rightarrow\lambda=-n^۲\quad,\quad u_t(x,۰)=۰\Rightarrow D=۰$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=A'_n\cos nt\sin nx\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}u_n(x,t)$$

$$u(x,۰)=\sin ۵x+\sin ۴x\Rightarrow\sum_{n=۱}^{\infty}A'_n\sin nx=\sin ۵x+\sin ۴x$$

$$\Rightarrow A_n=\begin{cases}۱ & n=۴,۵\\ ۰ & \text{سایر نقاط}\end{cases}\Rightarrow u(x,t)=\cos ۴t\sin ۴x+\cos ۵t\sin ۵x$$

۳۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$u_{xx}=u_t-x\quad,\quad u(۰,t)=۰\quad,\quad u(۱,t)=\frac{۵}{۶}\quad,\quad u(x,۰)=\frac{-x^۳}{۶}$$

فرض می‌کنیم $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ به‌طوری‌که $w(x)$ در معادله ناهمگن و $v(x,t)$ در معادله ناهمگن صدق کند:

$$w''(x)=-x\Rightarrow w(x)=\frac{-x^۳}{۶}+ax+b$$

a و b را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط مرزی صدق کند:

$$w(۰)=۰\Rightarrow b=۰\quad,\quad w(۱)=\frac{۵}{۶}\Rightarrow\frac{-۱}{۶}+a=\frac{۵}{۶}\Rightarrow a=۱$$

معادله دیفرانسیل برای v به‌صورت مقابل درمی‌آید:

$$\begin{cases}v_{xx}=v_t\\ v(۰,t)=u(۰,t)-w(۰)=۰\\ v(۱,t)=u(۱,t)-w(۱)=۰\\ v(x,۰)=u(x,۰)-w(x)=-x\end{cases}$$

فرض می‌کنیم $v(x,t)=X(x)T(t)$. داریم:

$$X''T=T'X\ \Rightarrow\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=\gamma$$

اگر $\gamma<۰\ ,\ \alpha^۲=-\gamma>۰$:

$$T=De^{-\alpha^۲t}\ ,\ X=A\cos\alpha x+B\sin\alpha x\quad,\quad v(۰,t)=۰\Rightarrow A=۰$$

$$v(۱,t)=۰\Rightarrow\sin\alpha=۰\Rightarrow\alpha=n\pi\Rightarrow v(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}C_ne^{-(n\pi)^۲t}\sin n\pi x$$

Scanned by CamScanner

$$v(x,0)=x\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\pi x=-x\xrightarrow{0<x<1}C_n=-2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$

$$=-2\{\frac{-x}{n\pi}\cos n\pi x\Big]_0^1-\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\}=\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-(n\pi)^2t}\sin n\pi x-\frac{x^3}{6}+x$$

۴۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}=(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})(u_x-u_y)=(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})^2u=0$$

تغییر متغیر $\xi=x$, $\eta=y+x$ را در نظر بگیرید: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta})u$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial\eta}u\Rightarrow(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y})^2u=(\frac{\partial}{\partial\xi})^2u=u_{\xi\xi}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(u_\xi)=0\Rightarrow u_\xi=f(\eta)\Rightarrow u(\eta,\xi)=\int f(\eta)d\xi+g(\eta)=\xi f(\eta)+g(\eta)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=xf(x+y)+g(x+y)$$

۴۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

از طرفین معادله، لاپلاس نسبت به متغیر t می‌گیریم:

$$L\{u_{xx}\}=L\{u_t\}\Rightarrow\frac{d^2}{(dx)^2}U(x,s)=SU(x,s)-u(x,0)\Rightarrow\frac{d^2U(x,s)}{(dx)^2}=SU(x,s)$$

$$u''(x,s)=Su(x,s)\Rightarrow u''(x,s)-Su(x,s)=0\to(D^2-S)u(x,s)=0$$

$$D^2-s=0\to D^2=s\to D=\pm\sqrt{s}\to u(x,s)=A(s)e^{\sqrt{s}x}+B(s)e^{-\sqrt{s}x}$$

$$u(0,t)=0\xrightarrow{\text{لاپلاس از طرفین}}u(0,s)=0$$

اکنون باید $A(s)$ و $B(s)$ را مشخص کنیم: $\Rightarrow A(s)+B(s)=0\to A(s)=-B(s)$ (۱)

$$u(1,t)=1-e^t\to L\{u(1,t)\}=L\{1-e^t\}\to u(1,s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow A(s)e^{\sqrt{s}}+B(s)e^{-\sqrt{s}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\qquad(2)$$

اکنون دو معادله و دو مجهول داریم:

$$\begin{cases}A(s)=-B(s)\\A(s)e^{\sqrt{s}}+B(s)e^{-\sqrt{s}}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{A(s)=-B(s)} A(s)e^{\sqrt{s}} - A(s)e^{-\sqrt{s}} = \frac{۱}{s} - \frac{۱}{s-۱} \to A(s) = \frac{\frac{-۱}{s^۲ - s}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}$$

$$A(s) = \frac{\frac{-۱}{s^۲ - s}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}} \quad , \quad B(s) = \frac{\frac{۱}{s^۲ - s}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}}$$

$$\Rightarrow u(x,s) = \frac{\frac{-۱}{s^۲ - s}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}} e^{\sqrt{s}x} + \frac{\frac{۱}{s^۲ - s}}{e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}}} e^{-\sqrt{s}x} \to y(x,t) = L^{-۱}\{y(x,s)\}$$

۴۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$u_t = ۹u_{xx} \quad , \quad ۰ < x < ۳ \quad , \quad t > ۰$

$u(۰,t) = u(۳,t) = ۰ \quad , \quad u(x,۰) = \sin ۴\pi x$

$$u(x,y) = X(x)\,T(t) \Rightarrow XT' = ۹X''T \Rightarrow \frac{T'}{T} = ۹\frac{X''}{X} = \lambda$$

$$\lambda < ۰ \;\to\; \lambda = -\alpha^۲ \Rightarrow T = Ae^{-\alpha^۲ t} \quad , \quad X = B\cos(\frac{\alpha x}{۳}) + D\sin(\frac{\alpha x}{۳})$$

$u(۰,t) = ۰ \Rightarrow X(۰) = ۰ \Rightarrow B = ۰$

$u(۳,t) = ۰ \Rightarrow X(۳) = ۰ \Rightarrow \sin\alpha = ۰ \Rightarrow \alpha = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow u(x,t) = Ce^{-(k\pi)^۲ t}\sin(\frac{k\pi}{۳}t)$$

$$u(x,۰) = \sin ۴\pi x \Rightarrow C\sin(\frac{k\pi}{۳}t) = \sin ۴\pi x \Rightarrow C = ۱ \quad , \quad k = ۱۲$$

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{-۱۴۴\pi^۲ t}\sin ۴\pi x$$

۴۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$۲u_{xx} + ۳u_{xy} + u_{yy} = ۰ \Rightarrow (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(۲\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})u = ۰$$

$$\begin{matrix} \eta = y - x \\ \xi = y - \frac{۱}{۲}x \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{-\partial}{\partial\eta} - \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial\xi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\xi} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial\xi} \;,\; ۲\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial\eta} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\partial}{\partial\eta}u) = ۰ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}(u_\eta) = ۰ \Rightarrow u_\eta = f(\eta)$$

$$\Rightarrow u(\eta,\xi) = \int f(\eta)d\eta + g(\xi) = h(\eta) + g(\xi) \Rightarrow u(x,y) = h(y-x) + g(y - \frac{۱}{۲}x)$$

Scanned by CamScanner

$$u(x\,,\text{۰})=x^{\text{۲}} \;\Rightarrow\; h(-x)+g(-\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=x^{\text{۲}}$$

$$u_y(x\,,\text{۰})=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \;\Rightarrow\; h'(-x)+g'(-\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \;\Rightarrow \begin{cases} -h'(-x)-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}g'(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=\text{۲}x \\ h'(-x)+g'(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h'(-x)=-\text{۴}x-\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \\ g'(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=\text{۴}x+\frac{\text{۲}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h'(x)=\text{۴}x-\frac{\text{۱}}{\text{۱}+x^{\text{۲}}} \\ g'(x)=-\text{۸}x+\frac{\text{۲}}{\text{۱}+\text{۴}x^{\text{۲}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x)=\text{۲}x^{\text{۲}}-\tan^{-\text{۱}}(x)+C_{\text{۱}} \\ g(x)=-\text{۴}x^{\text{۲}}+\tan^{-\text{۱}}(\text{۲}x)+C_{\text{۲}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,y)=h(y-x)+g(y-\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}x)=\text{۲}(y-x)^{\text{۲}}-\tan^{-\text{۱}}(y-x)-\text{۴}(y-\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}x)^{\text{۲}}+\tan^{-\text{۱}}(\text{۲}y-x)+C$$

$$u(x\,,y)=-\text{۲}y^{\text{۲}}+x^{\text{۲}}-xy+\tan^{-\text{۱}}(\text{۲}y-x)-\tan^{-\text{۱}}(y-x)+C \;,\; u(x\,,\text{۰})=x^{\text{۲}}\Rightarrow C=\text{۰}$$

$$\Rightarrow u(x\,,y)=x^{\text{۲}}-xy-\text{۲}y^{\text{۲}}+\tan^{-\text{۱}}(\text{۲}y-x)-\tan^{-\text{۱}}(y-x)$$

۴۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

$$F\{u_t\}-\text{۹}F\{u_{xx}\}=F_t+\text{۹}\omega^{\text{۲}}F=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}}\int_{-\text{۱}}^{\text{۱}}e^{-i\omega x}dx=\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$F\{u(x,\text{۰})\}=F(\omega,\text{۰})=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\text{۰}}e^{x}e^{-i\omega x}dx+\int_{\text{۰}}^{\infty}e^{-x}e^{-i\omega x}dx\right)=\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\omega^{\text{۲}}}$$

$$F(\omega,t)=Ae^{-\text{۹}\omega^{\text{۲}}t}+F^{*}(\omega,t)$$

که در آن $F^{*}(\omega,t)$ جواب خصوصی معادله است که به‌صورت $F^{*}(\omega,t)=\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\text{۱}}{\text{۹}\omega^{\text{۳}}}\sin\omega$ است. بنابراین

$$F(\omega,\text{۰})=A+\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\text{۱}}{\text{۹}\omega^{\text{۳}}}\sin\omega=\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\omega^{\text{۲}}}\Rightarrow A=\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\omega^{\text{۲}}}-\frac{\sin\omega}{\text{۹}\omega^{\text{۳}}}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\left(\left(\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\omega^{\text{۲}}}-\frac{\sin\omega}{\text{۹}\omega^{\text{۳}}}\right)e^{-\text{۹}\omega^{\text{۲}}t}+\sqrt{\frac{\text{۲}}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\text{۹}\omega^{\text{۳}}}\right)e^{i\omega x}d\omega$$

۴۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

با فرض $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$، $w(x,t)$ را طوری می‌یابیم که:

$$w_x(\text{۰},t)=t^{\text{۲}}-\text{۱} \quad , \quad w_x(\text{۰/۵},t)=-\text{۱}$$

با قرار دادن $w(x,t)=ax^{\text{۲}}+bx$، a و b را طوری می‌یابیم که در شرایط فوق صدق کند. با تعیین چنین w ای، شرایط کرانه‌ای برای v به‌صورت $v_x(\text{۰},t)=\text{۰}$ و $v_x(\text{۰/۵},t)=\text{۰}$ درمی‌آید:

$$\left.\begin{matrix} w_x(x,t)=\text{۲}ax+b \\ w_x(\text{۰},t)=t^{\text{۲}}-\text{۱} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=t^{\text{۲}}-\text{۱}\;,\; w_x(\text{۱},t)=-\text{۱} \;\Rightarrow\; a=-t^{\text{۲}}$$

Scanned by CamScanner

در نتیجه: $w(x,t) = -t^2x^2 + (t^2 - 1)x$

بنابراین با قرار دادن $u(x,t)$، در معادله مسئله می‌یابیم: $v_{tt} - v_{xx} = 0$

$$v(x,0) = x^2 + x \ , \ v_t(x,0) = 0 \ , \ v_x(0,t) = 0 \ , \ v_x(0/5,t) = 0 \quad t > 0 \ , \ 0 \le x \le 0/5$$

اکنون به راحتی با استفاده از جداسازی متغیرها و با توجه به اینکه شرایط مرزی برای v_x داده شده است، جواب به صورت مقابل خواهد بود:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2n\pi t + B_n \sin 2n\pi t) \sin 2n\pi x$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin 2n\pi x = x^2 + x$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{0/5}\int_0^{0/5} (x^2 + x)\sin 2n\pi x dx = \frac{3(-1)^{n+1}}{2n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}$$

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi B_n \cos 2n\pi t \sin 2n\pi x) = 0 \Rightarrow B_n = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -t^2x^2 + (t^2 - 1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^{n+1}}{2n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^3}\right) \cos 2n\pi t \sin 2n\pi x$$

Scanned by CamScanner

پاسخ فصل ۴

توابع مختلط

پرسش ۲۳

۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

(www) خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) u همساز و توافقی است:

$$\begin{cases} u_x = a\cos ax \cosh by \to u_{xx} = -a^{۲} \sin ax \cosh by \\ u_y = b\sin ax \sinh by \to u_{yy} = b^{۲} \sin ax \cosh by \end{cases} \to u_{xx} + u_{yy} = ۰$$

$$\to -a^{۲} \sin ax \cosh by + b^{۲} \sin ax \cosh by = ۰ \to \sin ax \cosh by(b^{۲} - a^{۲}) = ۰$$

$$\Rightarrow b^{۲} = a^{۲} \to b = \pm a$$

ب)

$$\begin{cases} u_x = v_y = a\cos ax \cosh(\pm ay) \to v = \int a\cos ax \cosh(\pm ay)dy = \pm\cos ax \sinh(\pm ay) & (۱) \\ u_y = -v_x = \pm a\sin ax \sinh(\pm ay) \to v = \mp\int a\sin ax \sinh(\pm ay)dx = \pm\cos ax \sinh(\pm ay) & (۲) \end{cases}$$

از (۱),(۲) تابع v عبارت است از $v = \pm\cos ax \sinh(\pm ay)$. از طرفی $u = \sin ax \cosh \pm ay$ و می‌توان نوشت:

$$f(z) = \sin ax \cosh ay \mp \cos ax \sinh ay$$

با جایگذاری $x = ۰$ و $y = z$ داریم:

$$f(z) = \mp \sinh az$$

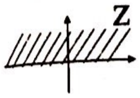
۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

$$f(x)=x+i|y| \to \begin{cases} u=x \\ v=|y| \end{cases} \to \begin{cases} u_x=v_y & u_x=1 & u_y=0 \\ u_y=-v_x & v_y=\begin{cases}1 & y>0\\ -1 & y<0\end{cases} & v_x=0 \end{cases}$$

هر دو شرط کوشی ریمان فقط به ازای $y>0$ (نیم صفحه بالایی صفحه z)برقرار است هم‌چنین در این ناحیه v_y, u_y, v_x, u_x, v, u همه پیوسته هستند.پس ناحیه تحلیلی بودن $f(z)$، yهای مثبت است.(خود محور $y=0$ را شامل نمی شود.)



۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

باید بررسی شود که معادله لاپلاس صادق باشد یعنی: $\nabla^2 u = u_{xx}+u_{yy}=0$

$$\begin{cases} u_x = 2x + 2e^{2x}\cos by \\ u_y = -2ay - be^{2x}\sin by \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx} = 2+4e^{2x}\cos by \\ u_{yy} = -2a - b^2 e^{2x}\cos by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2+e^{2x}\cos 2y$$

$$u_x=v_y \;,\; u_y=-v_x \to v_y=u_x=2x+2e^{2x}\cos 2y \to v(x,y)=2xy+e^{2x}\sin 2y+f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= 2y+2e^{2x}\sin 2y+f'(x) \\ u_y &= -2y-2e^{2x}\sin 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=k$$

$$\Rightarrow v(x,y)=2xy+e^{2x}\sin 2y+k$$

$$f(z)=u+iv=z^2+e^{2z}+ki$$

(xها را به z و y را به صفر تبدیل می‌کنیم.)

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$u(r,\theta)=\theta+r^2\cos\theta$$

$$f'(z)=\left(\frac{\partial v}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}-i\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)e^{-i\theta}=\left(2r\cos\theta-i\frac{1}{r}(1-r^2\sin\theta)\right)e^{-i\theta}$$

$$z=1+i \to \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2} \\ \theta=tg^{-1}\dfrac{y}{x}=tg^{-1}1=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$f'(z)\big|_{z=1+i}=(2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-i(\frac{1-(\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}))e^{-i\frac{\pi}{4}}=(2-\frac{i}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}))(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=\frac{1}{2}((3\sqrt{2}-1)-i(\sqrt{2}+2))$$

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$f(z)=\frac{|z-1|^2}{z-1}+|x|+iy$$

می‌دانیم:

$$(z-1)\overline{(z-1)}=|z-1|^2$$

$$\Rightarrow f(z)=\overline{z-1}+|x|+iy=x-1-iy+|x|+iy=x+|x|-1$$

شرایط کوشی ریمان: $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u=x+|x|-1\\ v=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x-1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$

می‌بینیم که برای x های مثبت کوشی ریمان صدق نمی‌کند اما برای $\forall x<0$ هم شرایط کوشی ریمان صادق است و هم تابع‌های u و v و u_x و v_x و u_y و v_y پیوسته هستند، پس برای $\forall x\geq 0$ تابع $f(z)$ غیر تحلیلی و برای $\forall x<0$ تابع $f(z)$ تحلیلی است.

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

$$z^2=0\rightarrow z=0$$

قطب مرتبه دوم:

$$e^z+i=0\rightarrow e^z=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}\rightarrow z=i\frac{3\pi}{2}$$

قطب مرتبه اول:

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

$$u_x=2-e^x\sin y\rightarrow u_{xx}=-e^x\sin y$$

$$u_y=-e^x\cos y\rightarrow u_{yy}=e^x\sin y\quad\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0\rightarrow$$ تابع همساز است.

$$u_x=v_y=2-e^x\sin y\Rightarrow v=\int(2-e^x\sin y)dy+A(x)=2y+e^x\cos y+A(x)$$

$$-u_y=v_x=e^x\cos y+A'(x)=e^x\cos y\Rightarrow A'(x)=0\Rightarrow A(x)=c$$

$$\Rightarrow f(z)=(2x-e^x\sin y)+i(2y+e^x\cos y+c)=2(x+iy)-e^x(\sin y-i\cos y)+ic$$

$$f(z)=2z-e^z+ic$$

جای x ها را با z و جای y ها را با صفر عوض می‌کنیم:

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

برای اینکه u همساز باشد باید داشته باشیم: $u_{xx}+u_{yy}=0$.

$$u_x=-a\sin ax\cosh by \Rightarrow u_{xx}=-a^2\cos ax\cosh by$$

$$u_y=b\cos ax\sinh by \Rightarrow u_{yy}=b^2\cos ax\cosh by$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \Rightarrow (b^2-a^2)\cos ax\cosh by=0 \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$$

حال v در صورتی مزدوج همساز u است که $u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x$. بنابراین:

$$v_y=u_x=-a\sin ax\cosh by \Rightarrow v=\int[-a\sin ax\cosh by]dy$$

$$\Rightarrow v=\frac{-a}{b}\sin ax\sinh by+h(x) \Rightarrow v_x=\frac{-a^2}{b}\cos ax\sinh by+h'(x)$$

$$u_y=-v_x \Rightarrow b\cos ax\sinh by=\frac{a^2}{b}\cos ax\sinh by-h'(x)$$

چون $a^2=b^2$ پس $b=\frac{a^2}{b}$. بنابراین با حذف دو جمله از دو طرف تساوی داریم:

$$h'(x)=0 \Rightarrow h(x)=c$$

که c یک عدد ثابت است. در نتیجه

$$v=\frac{-a}{b}\sin ax\sinh by+c$$

که با فرض $b=\pm a$ داریم:

$$v=\mp\sin ax\sinh(\pm ay)+c$$

۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\overline{z})^3}{z^2} & \to z\neq 0\\ 0\to z=0\end{cases}$$

$$\frac{(\overline{z})^3}{z^2}=\frac{(re^{-i\theta})^3}{(re^{i\theta})^2}=re^{-i5\theta}=r\cos 5\theta-ir\sin 5\theta \to \begin{cases}u=r\cos 5\theta\\ v=-r\sin 5\theta\end{cases}$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{(\overline{z})^3}{z^2}\right)=\lim_{r\to 0} re^{-i5\theta}=0=f(z)\Big|_{z=0} \Rightarrow$$ تابع $f(z)$ در $z=0$ پیوسته است.

شرایط کوشی ریمان:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{-1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\end{cases} \to \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{r}(-5r\cos 5\theta)\\ -\sin 5\theta=\dfrac{-1}{r}(-5r\sin 5\theta)\end{cases}$$

در نقطه $z=0$ یعنی $r=0\ ,\ \forall\theta$ شرایط کوشی ریمان برقرار نمی‌باشد. با توجه به عدم برقرار شرایط کوشی ریمان در $z=0$، در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

$$f(z)=u+iv=e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=e^x\cos y\\ v=e^x\sin y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow e^x\cos y=e^x\cos y\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\partial v}{\partial x}\Rightarrow -e^x\sin y=-(e^x\sin y)\end{cases}$$

با توجه به برقرار بودن معادلات کوشی- ریمان و پیوسته بودن u، v، u_x، v_x، u_y و v_y تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^xe^{iy}=e^{x+iy}=e^z$$

۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$\cos z=2\to\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=2$$

$$x=e^{iz}\to\frac{x^2-1}{x}=4\to x^2-1-4x=0\to x=2\pm\sqrt{5}=e^{iz}$$

$$\to e^{iz}=(2+\sqrt{5})e^{2ik\pi}\ \text{یا}\ e^{iz}=(\sqrt{5}-2)e^{i(2k+1)\pi}$$

$$\begin{cases}iz=\ln(2+\sqrt{5})+2k\pi i\\ iz=\ln(\sqrt{5}-2)+(2k+1)\pi i\end{cases}\to\begin{cases}z=-i\ln(2+\sqrt{5})+2k\pi\\ z=-i\ln(\sqrt{5}-2)+(2k+1)\pi\end{cases}$$

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$z=re^{i\theta}\ ,\ z^5=1\Rightarrow r^5e^{i5\theta}=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r^5=1\\ 5\theta=2k\pi\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}r^5=-1\\ 5\theta=(2k+1)\pi\end{cases}\to\begin{cases}z=e^{\frac{2k\pi}{5}}\\ z=-e^{\frac{(2k+1)\pi}{5}}\end{cases}\qquad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$z=(\sqrt{3}-i)^6\to\sqrt{3}-i=\rho e^{i\varphi}\to\begin{cases}\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2\\ \varphi=\tan^{-1}\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-\pi}{6}\end{cases}$$

ناحیه چهارم مختصاتی: $\begin{cases}\sin < 0 \\ \cos > 0\end{cases}$

$$z = re^{i\theta} = (2e^{-i\frac{\pi}{6}})^6 = 2^6 e^{-i\pi} \Rightarrow \begin{cases} r = 2^6 = 64 \\ \theta = -180^\circ \end{cases}$$

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y + \sin y) = e^x((x+1)\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) = e^x((x+1)\cos y - y\sin y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x((x+1)\sin y + y\sin y + \sin y) = e^x((x+2)\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x(-(x+1)\sin y - \sin y - y\cos y) = e^x(-(x+2)\sin y - y\cos y)$$

همانطور که می‌بینیم u ، u_x ، u_y ، u_{xx} ، u_{yy} همه جا پیوسته می‌باشند. همچنین معادله لاپلاس هم صدق می‌کند یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. پس $u(x,y)$ همساز است. از طرفی $v(x,y)$ مزدوج همساز $u(x,y)$ است. پس قوانین کوشی ریمان صدق می‌کند. درنتیجه

$$(I)\quad v_y = u_x \Rightarrow v(x,y) = \int e^x((x+1)\sin y + y\cos y)dy = e^x(-x\cos y + y\sin y) + h(x)$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(-x\cos y + y\sin y - \cos y) + h'(x) = e^x(-(x+1)\cos y + y\sin y) + h'(x)$$

$$(II)\quad v_x = -u_y = -e^x((x+1)\cos y - y\sin y) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = k$$

$$\Rightarrow v(x,y) = e^x(-x\cos y + y\sin y) + k$$

برای بیان $f(z)$ برحسب z باید بجای x ها قرار دهیم z و بجای y ها، صفر. پس:

(k یک ثابت دلخواه است.)

$$f(z) = u + iv = (-ze^z + k)i$$

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

الف)

$$u(x,y) = e^x \cos y$$

$$u_x = e^x\cos y \;,\; u_{xx} = e^x\cos y \;,\; u_y = -e^x \sin y \;,\; u_{yy} = -e^x\cos y$$

u ، u_x ، u_y ، u_{xx} ، u_{yy} همگی در تمام فضای z پیوسته هستند همچنین معادله لاپلاس نیز صدق می‌کند یعنی $u_{xx} + u_{yy} = 0$ پس u همساز است.

$$u_x = v_y = e^x\cos y \Rightarrow v(x,y) = e^x \sin y + k(x)$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow\begin{cases} v_x = e^x \sin y + k'(x) \\ v_x = -u_y = e^x \sin y \end{cases} \to k'(x) = ۰ \to k(x) = c_۱ \to v(x,y) = e^x \sin y + c_۱$$

ب)

$$u(x,y) = x^۲ - y^۲ - ۲x + ۳y$$

$$u_x = ۲x - ۲ \ , \ u_{xx} = ۲ \ , \ u_y = -۲y + ۳ \ , \ u_{yy} = -۲$$

معادله لاپلاس هم صدق می‌کند پس همساز است.

$$u_x = v_y = ۲x - ۲ \Rightarrow v(x,y) = (۲x-۲)y + h(x)$$

$$\begin{cases} v_x = ۲y + h'(x) \\ v_x = -u_y = ۲y - ۳ \end{cases} \to h'(x) = -۳ \to h(x) = -۳x + c_۲ \to v(x,y) = ۲(x-۱)y - ۳x + c_۲$$

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

$$\begin{cases} f(z) = (۱+i)(x+y)^۲ \\ u_x = v_x = ۲(x+y) \end{cases} \to u = v = (x+y)^۲ \to u_y = v_y = ۲(x+y)$$

کوشی ریمان: $\begin{cases} u_x \overset{?}{=} v_y \\ u_y \overset{?}{=} -v_x \end{cases}$

شرط اول کوشی ریمان در کل صفحه مختلط صدق می‌کند اما شرط دوم تنها در نقطه $z = ۰$ صدق می‌کند. بنابراین با توجه به پیوسته بودن تابع‌های u، u_x، u_y، v_x، v_y، تابع تنها در نقطه $z = ۰$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در این نقطه برابر است با:

$$f'(z)|_{z=۰} = u_x + iv_x = ۲(x+y)(۱+i)|_{x=۰, y=۰} = ۰$$

هم‌چنین تابع در هیچ جای صفحه مختلط تحلیلی نیست.

۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

الف)

$$\sqrt{۱ - i\sqrt{۳}} = re^{i\theta} \Rightarrow r^۲ e^{i۲\theta} = ۱ - i\sqrt{۳} \qquad \begin{cases} \cos > ۰ \\ \sin < ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{ناحیه چهارم}$$

$$\begin{cases} r^۲ = \sqrt{(۱)^۲ + (\sqrt{۳})^۲} = ۲ \\ ۲\theta = tg^{-۱}\dfrac{-\sqrt{۳}}{۱} = -\dfrac{\pi}{۳} \end{cases} \to \begin{cases} r = \sqrt{۲} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{۶} \end{cases} \to \sqrt{۱ - i\sqrt{۳}} = \sqrt{۲}e^{-\frac{\pi}{۶}i} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sqrt{۳} - i)$$

ب)

$$\sqrt[۳]{۱+i} = \rho e^{-i\varphi} \to ۱ + i = \rho^۳ e^{i۳\varphi} \to \rho^۳ e^{i۳\varphi} = \sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}i\right) = \sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^۳ = \sqrt{۲} \\ ۳\varphi = \dfrac{\pi}{۴} \end{cases} \to \begin{cases} \rho = \sqrt[۶]{۲} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases} \to \sqrt[۳]{۱+i} = \sqrt[۶]{۲}e^{i\frac{\pi}{۱۲}} = \sqrt[۶]{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right)$$

Scanned by CamScanner

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

$$f'(z_\circ)=(\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial y})(x_\circ,y_\circ)\xrightarrow[\text{تحلیلی است}]{\text{یک تابع } f(z)}\begin{matrix}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{matrix}\Rightarrow v_x=-u_y$$

$$\rightarrow f'(z_\circ)=(\frac{\partial u}{\partial x}+j(-\frac{\partial u}{\partial y}))(x_\circ,y_\circ)=(\frac{\partial u}{\partial x}-j\frac{\partial u}{\partial y})(x_\circ,y_\circ)\rightarrow f'(\circ-\pi i)=-1-j(\circ)=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(\circ-1+e^x\sin y)\Big|_{(\circ,-\pi)}=-1+e^\circ\sin(-\pi)=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(1-\circ+e^x\cos y)\Big|_{(\circ,-\pi)}=1+e^\circ\cos(-\pi)=\circ$$

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

$$f(z)=e^{x-iy}=e^x(\cos y-i\sin y)=e^x\cos y-ie^x\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow e^x\cos y=-e^x\cos y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow -e^x\sin y=-(-e^x\sin y) \qquad (2)$$

باید دو تساوی (۱) و (۲) برقرار باشند. تساوی (۱) به ازای $y=\frac{\pi}{2}$ برقرار است، اما تساوی (۲) بـه ازای $y=\circ$ برقرار است. نتیجه می‌گیریم که این تابع در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست لذا در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

$$g(z)=e^{-y+ix}=e^{-y}(\cos x+i\sin x)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\rightarrow -\sin xe^{-y}=-e^{-y}\sin x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\rightarrow -e^{-y}\cos x=-(e^{-y}\cos x)$$

این تابع در هر دو شرط کوشی- ریمان صادق است. لذا در همه نقاط تحلیلی خواهد بـود و در همـه نقاط مشتق‌پذیر است.

$$g(z)=e^{-y+ix}=e^{i(x+iy)}=e^{iz}$$

اگر تابع مختلط $f(z)$ را بتوان به صورت تابعی از z و $\bar{z}$ نوشت، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\circ$ هم ارز با معادلات کوشی- ریمان هست به این معنی که در هر جای صفحه مختلط مقدار $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ برابر صفر بـود، در آن نقـاط معادلات کوشی- ریمان صادق هستند.

$$f(z)=e^{\bar{z}}\rightarrow\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=e^{\bar{z}}=\circ$$ غیر قابل قبول

Scanned by CamScanner

اصلا برابر صفر نمی‌شود. در هیچ جایی معادلات کوشی-ریمان صادق نیست. در هیچ جایی تحلیلی و مشتق پذیر نیست.

$$g(z)=e^{iz}\to\frac{\partial y}{\partial \bar z}=0$$

در همه جای صفحه مختلط $(\frac{\partial g}{\partial \bar z}=0)$ برقرار است. در همه جا تحلیلی و مشتق‌پذیر است.

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

برای آن‌که u همساز باشد باید $\nabla^2 u=u_{xx}+u_{yy}=0$.

$$u=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+y^2})\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\\&\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

بنابراین می‌بینیم که u پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته است و هم‌چنین در معادله لاپلاس $(\nabla^2 u=0)$ نیز صدق می‌کند پس u همساز است. مزدوج u یعنی γ را از معادلات کوشی ریمان به‌دست می‌آوریم:

معادله اول: $\frac{\partial \gamma}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\Rightarrow\gamma(x,y)=\int\frac{x}{x^2+y^2}dy+f(x)=\tan^{-1}\frac{y}{x}+f(x)$

معادله دوم: $\frac{\partial \gamma}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow\frac{-y}{x^2}.\frac{1}{(1+\frac{y}{x})^2}+f'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=0\Rightarrow f(x)=k\Rightarrow\gamma(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}+k$$

$$\nabla_\gamma^2=\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}=0$$

γ نیز در معادله لاپلاس صدق می‌کند زیرا

$$\Rightarrow f(z)=u+i\gamma=\ln|z|+i(tg^{-1}(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)})+k)$$

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

$f(z)$ تحلیلی است $\Rightarrow(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})v=0$

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})(u^2+v^2)=\frac{\partial}{x}(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y})$$

$$=2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(\frac{\partial u}{\partial x})^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2(\frac{\partial v}{\partial x})^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(\frac{\partial u}{\partial y})^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2(\frac{\partial v}{\partial y})^2$$

$$=2u\underbrace{((\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})u)}_{\text{صفر}}+2v\underbrace{((\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})v)}_{\text{صفر}}+2((\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2)$$

$$f(z)=u+iv \rightarrow df=(u_x+iv_x)dx+(u_y+iv_y)dy$$

$$\xrightarrow{u_y=-v_x\ ,\ u_x=v_y} df=(u_x+iv_x)(dx+idy)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dz}=u_x+iv_x \Rightarrow |f'(z)|^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial x})^2=(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2$$

$$\Rightarrow (\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})|f(z)|^2=4|f'(z)|^2 \Rightarrow k=4$$

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

$$f(z)=\cos(x+y)+i\cos(x-y)=u+iv$$

$$u_x=-\sin(x+y)\quad,\quad u_y=-\sin(x+y)\quad,\quad v_x=-\sin(x-y)\quad,\quad v_y=\sin(x-y)$$

برای اینکه f در ناحیه‌ای تحلیلی باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}u_x=v_y \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(x+y)=\sin(x-y)\\ u_y=-v_x \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(x+y)=\sin(x-y)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+y)+\sin(x-y)=0 \Leftrightarrow \sin x\cos y=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \text{ یا } \cos y=0$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi \text{ یا } y=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

تابع در نواحی $(x\ ,\ y=k\pi+\frac{\pi}{2})$ و $(x=k\pi\ ,\ y)$ تحلیلی است.

۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$u(x\ ,\ y)=x^2-ay^2+e^{2x}\cos by$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2x+2e^{2x}\cos by)=2+4e^{2x}\cos by$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-2ay-be^{2x}\sin by)=-2a-b^2e^{2x}\cos by$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \Rightarrow 2-2a+(4-b^2)e^{2x}\cos by=0 \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=\pm 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x\ ,\ y)=x^2-y^2+e^{2x}\cos 2y$$

$$u_x = v_y \Rightarrow v_y = 2x + 2e^{2x}\cos 2y$$
$$\Rightarrow v(x,y) = \int (2x + 2e^{2x}\cos 2y)dy + g(x) = 2xy + e^{2x}\sin 2y + g(x)$$
$$u_y = -v_x \Rightarrow v_x = 2y + 2e^{2x}\sin 2y$$
$$\Rightarrow 2y + 2e^{2x}\sin 2y = 2y + 2e^{2x}\sin 2y + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C$$
$$\Rightarrow v(x,y) = 2xy + e^{2x}\sin 2y + C$$
$$\Rightarrow f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 + 2ixy) + e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) + iC$$
$$= (x+iy)^2 + e^{2(x+iy)} = z^2 + e^{2z}$$

۴۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$v_y = u_x = 6xy \Rightarrow v = \int 6xy\,dy + g(x) = 3xy^2 + g(x)$$
$$v_x = -u_y = 3(y^2 - x^2) = 3y^2 + g'(x) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 \Rightarrow g(x) = -x^3 + C$$
$$\Rightarrow v(x,y) = 3xy^2 - x^3 + C$$
$$f(z) = u + iv = 3x^2y - y^3 + i(3xy^2 - x^3) = (ix - y)^3 = (i(x+iy))^3 = -iz^3$$
$$f'(z) = -3iz^2 \Rightarrow f'(i-1) = -3i(i-1)^2 = -3i(-1-2i+1) = -6$$

۴۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

چون $\text{Arg}(f(z))$ ثابت است، a و b وجود دارند به‌طوری‌که: $au = bv \quad (1)$ و حداقل یکی از a و b صفر نیست.

$$\Rightarrow au_x = bv_x \quad (2) \quad , \quad au_y = bv_y \quad (3)$$

همچنین از تحلیلی بودن $f(z)$ داریم:

$$u_y = -v_x \quad (5) \quad , \quad u_x = v_y \quad (4)$$

اگر $a = 0$، از (۲) و (۳) و این‌که $b \neq 0$ نتیجه می‌شود که $v_x = v_y = 0$ آنگاه از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که $u_x = u_y = 0$ که نتیجه می‌دهد u و v ثابتند. اگر $a \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$u = \frac{b}{a}v = cv$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} u_x = cv_x \\ u_x = v_y \end{cases} \Rightarrow v_y = cv_x \\ \begin{cases} u_y = cv_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow v_x = -cv_y \end{array}\right\} \Rightarrow v_x v_y = -c^2 v_x v_y \Rightarrow v_x v_y (1 + c^2) = 0$$

$(1+c^2)$ صفر نیست، پس $v_x v_y = 0$ است. پس $v_x = 0$ یا $v_y = 0$. اگر $v_x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} u_x = cv_x = 0 \Rightarrow v_y = -u_x = 0 \\ u_y = -v_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_x = u_y = v_x = v_y = 0 \Rightarrow \text{u و v ثابتند}$$

اگر $v_y=0$:

$$v_y=0\Rightarrow\begin{cases}u_y=cv_y=0\\u_x=v_y=0\end{cases}\Rightarrow v_x=-u_y=0\Rightarrow v_x=v_y=u_x=u_y=0\Rightarrow$$ u و v ثابتند

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$u(x,y)=xe^{-y}\cos x-ye^{-y}\sin x$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(e^{-y}\cos x-xe^{-y}\sin x-ye^{-y}\cos x)$$

$$=(y-1)e^{-y}\sin x-e^{-y}\sin x-xe^{-y}\cos x=(y-2)e^{-y}\sin x-xe^{-y}\cos x$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-xe^{-y}\cos x+ye^{-y}\sin x-e^{-y}\sin x)$$

$$=e^{-y}(x\cos x+\sin x)+e^{-y}\sin x-ye^{-y}\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=(y-2)e^{-y}\sin x-xe^{-y}\cos x+(2-y)e^{-y}\sin x+xe^{-y}\cos x=0$$

$\Rightarrow$ $u(x,y)$ همساز است.

$$v_y=u_x=e^{-y}\big((1-y)\cos x-x\sin x\big)$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\int e^{-y}\big((1-y)\cos x-x\sin x\big)dy+g(x)$$

$$=g(x)-e^{-y}\big((1-y)\cos x-x\sin x\big)-\int\cos x\,e^{-y}dy=g(x)+e^{-y}(x\sin x+y\cos x)$$

$$u_y=-v_x\Rightarrow -xe^{-y}\cos x+ye^{-y}\sin x-e^{-y}\sin x=-g'(x)-e^{-y}(\sin x+x\cos x-y\sin x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow g(x)=c\ \Rightarrow v(x,y)=e^{-y}(x\sin x+y\cos x)+c$$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

$$u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2+2y^3$$

$$u_{xx}+u_{yy}=0\Rightarrow(6x+2ay)+(2bx+12y)=0\Rightarrow(6+2b)x+(12+2a)y=0$$

$$\Rightarrow a=-6\ ,\ b=-3\Rightarrow u(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$$

$f(z)=v+iu$ $\xrightarrow{\text{تحلیلی است } f}$ $\begin{cases}v_x=u_y\\v_y=-u_x\end{cases}$

$$v_x=u_y=-6x^2-6xy+6y^2\Rightarrow v(x,y)=\int(-6x^2-6xy+6y^2)dx+g(y)$$

$$=-2x^3-3x^2y+6y^2x+g(y)$$

$$v_y=-u_x\Rightarrow -3x^2+12xy+g'(y)=-3x^2+12xy+3y^2$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow g'(y)=3y^2 \Rightarrow g(y)=y^3+C \Rightarrow v(x,y)=-2x^3-3x^2y+6y^2x+y^3+C$$

$$\Rightarrow f(x+iy)=-2x^3-3x^2y+6y^2x+y^3+C+i(x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3)$$

۳۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

تابع $g(z)=\frac{1}{(2z-i)^2}$ در نقاطی که $2z-i\neq 0$ تحلیلی است. تابع $h(z)=\ln(z^2+1)$ نیز در نقاطی که $z^2+1\neq 0$ و $\text{Arg}(z^2+1)\neq\pi$ تحلیلی است. پس f در اشتراک این نقاط تحلیلی است.

$$\begin{cases} 2z-i=0 \Rightarrow z=\frac{i}{2} & (1) \\ z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i & (2) \end{cases} \rightarrow \text{Arg}(z^2+1)=\pi \rightarrow \text{Arg}(x^2-y^2+1+2ixy)=\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x^2-y^2+1<0 \end{cases} \Rightarrow x=0\,,\ y^2>1 \qquad (3)$$

پس f در $\mathbb{C}-\{iy \mid y=\frac{1}{2}$ یا $|y|\geq 1\}$ تحلیلی است.

۳۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

$$f(z)=\ln z+\frac{|z-1|^2}{\overline{z}-1}$$

ابتدا نقاط غیرتحلیلی را مشخص می‌کنیم:

۱) $\ln z$: به طور کلی در $\ln u$، u باید یک عدد مثبت و مخالف صفر باشد. $z>0\ ;\ (x,y)>0$

پس $\ln z$ به ازای اعداد مختلط ربع دوم، سوم و چهارم غیرتحلیلی است. به عبارتی تعریف نشده است.

۲) $\frac{|z-1|^2}{\overline{z}-1}$: مخرج $\overline{z}-1=x-iy-1=(x-1)-iy=0 \quad , \quad \begin{pmatrix} x=1 \\ y=0 \end{pmatrix} \rightarrow (1,0)$

در نقطه $(1,0)$ هم غیر تحلیلی است.

$\xleftarrow{(1),(2)}$ {نقاط مختلط ربع سوم و دوم و چهارم} + $\{x+1\}$ $\rightarrow$ نقاطی که f(z) در آن‌ها غیرتحلیلی است

اکنون نقاط تکین را پیدا می‌کنیم. نقاط تکین نقاطی هستند که مشتق در آن‌ها وجود ندارد و یا برابر صفر است.

قضیه: برای تابع $f(z)=u+iv$ و نقطه $z_0=x_0+iy_0$ هرگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v نسبت به x و y در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته باشند و به ازای این z_0، آزمون کشی- ریمان صادق باشد، آن‌گاه می‌گوییم که مشتق تابع f(z) در z_0 وجود دارد و مقدار آن می‌شود:

$$f'(z)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+i\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$\Rightarrow f(z)=\ln z+\frac{|z-1|^2}{\overline{z}-1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\text{Arc}\tan(\frac{y}{x})+\frac{(x-1)^2+y^2}{(x-1)-iy}\,\frac{(x-1)+iy}{(x-1)+iy}$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\text{Arc}\tan(\frac{y}{x})+\frac{((x-1)^2+y^2)((x-1)+iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+x-1}_{u}+i\underbrace{(\mathrm{Arc}\tan(\frac{y}{x})+y)}_{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u_x=(\frac{1}{2})(\frac{2x}{x^2+y^2})+1=\frac{x}{(x^2+y^2)}+1\rightarrow$$ در مبدأ ناپیوسته است.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=u_y=(\frac{1}{2})(\frac{2y}{x^2+y^2})=\frac{y}{(x^2+y^2)}\rightarrow$$ در مبدأ ناپیوسته است.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_x=\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}\rightarrow$$ در مبدأ ناپیوسته است.

$$\frac{\partial v}{\partial y}=v_y=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}+1=\frac{1}{x+\frac{y^2}{x}}+1=\frac{x}{x^2+y^2}+1\rightarrow$$ در مبدأ ناپیوسته است.

مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در مبدأ ناپیوسته هستند. پس $f(z)$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

آزمون کشی-ریمان

$$\begin{cases} u_x=v_y\Rightarrow \dfrac{x}{(x^2+y^2)}+1=\dfrac{x}{x^2+y^2}+1 \\ u_y=-v_x\Rightarrow \dfrac{y}{(x^2+y^2)}=\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

چنان‌که مشاهده می‌شود آزمون کشی- ریمان به ازای تمام نقاط صادق است.

نتیجه: تنها نقطه تکین برای ما نقطه مبدأ بود. چون مشتقات جزئی مرتبه اول u و v نسبت به x و y در آن ناپیوسته بودند و $f'(z)$ در آن‌ها وجود ندارد.

Scanned by CamScanner

پاسخِ فصل ۵
پرسش ۲۷

انتگرال‌های مختلط

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

(www) خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\sin\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+\bar{z}^2}{2}}{5-4\frac{z-\bar{z}}{2i}}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{5-4\frac{z^2-1}{2iz}}\frac{dz}{iz}=\int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2(-4z^2+10iz+4)}dz=\int_{|z|=1}f(z)dz$$

نقاط تکین تابع $f(z)$ عبارتند از: $z=0\,,z=\frac{i}{2}\,,z=2i$

که $z=0$ قطب مرتبه دوم و درون دایره واحد است و $z=\frac{i}{2}$ قطب مرتبه اول و درون دایره واحد است.

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\frac{i}{2}}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{z^4+1}{z^2(-4z^2+10iz+4)'}=\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{z^4+1}{z^2(-8z+10i)}=\frac{17i}{24}$$

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^4+1}{-4z^2+10iz+4}\right)=-\frac{5i}{8}$$

Scanned by CamScanner

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\sin\theta}d\theta=2\pi i(\text{Res}f(z)\big|_{z=\frac{i}{2}}+\text{Res}f(z)\big|_{z=0})=2\pi i(\frac{17i}{24}-\frac{5i}{8})=\frac{-\pi}{6}$$

ب)

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^{2}+1}dx=\text{Im}(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^{2}+1}dx)$$

$z=\pm i$ نقاط تکین تابع $\frac{ze^{iz}}{z^{2}+1}$ می‌باشد که نقطه $z=i$ در نیم‌صفحه فوقانی قرار دارد و مانده تابع را در این نقطه باید محاسبه کنیم.

$$\text{Res}\frac{ze^{iz}}{z^{2}+1}\bigg|_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{2z}=\frac{ie^{-1}}{2i}=\frac{1}{2e}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^{2}+1}dz=2\pi i(\frac{1}{2}\frac{1}{2e})=\frac{\pi i}{2e}\to\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^{2}+1}dx=\frac{\pi}{2e}$$

ج) نقطه تکین تابع $\frac{\cosh z}{z(e^{z}-1)}$ عبارتند از $z=0$ که قطب مرتبه دوم می‌باشد.

$$\text{Res}\frac{\cosh z}{z(e^{z}-1)}\bigg|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^{2}\frac{\cosh z}{z(e^{z}-1)})=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(\frac{z\cosh z}{e^{z}-1})$$

$$=\lim_{z\to 0}(\frac{(\cosh z+z\sinh z)(e^{z}-1)-e^{z}(z\cosh z)}{(e^{z}-1)^{2}})$$

حد فوق مبهم از نوع $\div$ بوده و با اعمال قاعده هم‌ارزی داریم:

$$\text{Res}\frac{\cosh z}{z(e^{z}-1)}\bigg|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{(\cosh z+z\sinh z)((1+z+\frac{z^{2}}{2})-1)-(1+z)(z\cosh z)}{((1+z)-1)^{2}}$$

$$=\lim\frac{\frac{-z^{2}}{2}}{z^{2}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow I_{1}=\oint_{|z|=2}\frac{\cosh z}{z(e^{z}-1)}dz=2\pi i(\frac{-1}{2})=-\pi i \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم

$$I_{2}=\oint_{|z|=2}(1-z)^{4}\sin\frac{1}{z-1}$$

برای محاسبه مانده در $z=1$ باید بسط لوران تابع $\sin\frac{1}{z-1}$ را حول $z=1$ بنویسیم و در نتیجه داریم:

$$\text{Res}(1-z)^{4}\sin\frac{1}{z-1}\bigg|_{z=1}=\lim_{z\to 1}(z-1)(z-1)^{4}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^{3}3!}+\frac{1}{(z-1)^{5}5!}-\ldots)=\frac{1}{5!}$$

$$I_{2}=2\pi i(\frac{1}{5!})=\frac{2\pi i}{5!} \qquad (2)$$

Scanned by CamScanner

فرض می‌کنیم

$$I_{۳} = \int_{|z|=۲} (۳z+۲)^{۲} e^{z}$$

از آنجا که تابع $(۳z+۲)^{۲}e^{z}$ به ازای هر نقطه در اعداد مختلط تحلیلی است پس انتگرال آن روی مسیر بسته $|z|=۲$ صفر می‌باشد.

$$I_{۳} = ۰ \qquad (۳)$$

$$I = I_{۱} + I_{۲} + I_{۳} = -\pi i + \frac{۲\pi i}{۵!}$$

۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۳x}{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۲}+۴)} dx \to I = \int_{\mathrm{Im}\, z>۰} \underbrace{\frac{e^{i۳z}}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z^{۲}+۴)}}_{f(z)} dz$$

$$I = ۲\pi i(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=۲i} f(z)) = ۲\pi i(\lim_{z\to i} \frac{d}{dz}(z-i)^{۲} f(z) + \lim_{z\to ۲i}(z-۲i)f(z))$$

$$= ۲\pi i(\lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{e^{i۳z}}{(z+i)^{۲}(z^{۲}+۴)} + \lim_{z\to ۲i} \frac{e^{i۳z}}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z+۲i)})$$

$$= ۲\pi i(\frac{e^{-۳}(۳i\times ۲i\times ۳ - ۲\times ۳ - ۲\times i\times ۲i)}{(۲i)^{۳}(۳)^{۲}} + \frac{e^{-۶}}{(-۳)^{۲}(۴i)}) = ۲\pi i(\frac{-۲۰}{-۷۲i} + \frac{e^{-۶}}{۳۶i}) = \frac{\pi}{۱۸}(e^{-۶} + ۱۰e^{-۳})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۳x dx}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۴)} = \mathrm{Real}\{I\} = \frac{\pi}{۱۸}(e^{-۶} + ۱۰e^{-۳})$$

ب)

$$\int_{-۲\pi}^{۲\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta + ۳} = ۲\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta + ۳} \ ,\ z = e^{i\theta} \ ,\ \cos\theta = \frac{z+\frac{۱}{z}}{۲} \ ,\ d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$۲\int_{|z|=۱} \frac{\frac{z+\frac{۱}{z}}{۲}}{\frac{z+\frac{۱}{z}}{۲}+۳} \frac{dz}{iz} = \frac{۲}{i}\int_{|z|=۱} \frac{z^{۲}+۱}{z(z^{۲}+۶z+۱)} dz$$

$$z^{۲}+۶z+۱ = ۰ \to z = \begin{cases} \dfrac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲} & \text{داخل دایره واحد} \\ \dfrac{-۶-\sqrt{۳۵}}{۲} & \text{خارج دایره واحد} \end{cases}$$

بنابراین نقاط تکین داخل دایره واحد $z=۰$, $z = \frac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲}$ هستند. پس:

$$\int_{-۲\pi}^{۲\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta+۳}=\frac{۲}{i}(۲\pi i)(\underset{z=۰}{\operatorname{Res}} f(z)+\underset{z=\frac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲}}{\operatorname{Res}} f(z)$$

$$=۴\pi(۱+\frac{(\frac{(-۶+\sqrt{۳۵})^{۲}}{۴}+۱}{(\frac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲})(\frac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲}+\frac{۶+\sqrt{۳۵}}{۲})})=۴\pi(۱+\frac{۱}{\sqrt{۳۵}}(\frac{-۶+\sqrt{۳۵}}{۲}+\frac{۲}{-۶+\sqrt{۳۵}}))$$

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

جزء اول تابع زیر انتگرال تحلیلی است و جزء دوم غیر تحلیلی پس جزء اول $(\cos ۳z)$ را از روش های معمول انتگرال‌گیری و جزء دوم $(\bar{z})$ را از روش پارامتری حل می‌کنیم: $z=x+iy=x+ix^{۲}$

$$\int\cos ۳z dz=\int_{۰}^{۲+i۴}\cos ۳z dz=\frac{\sin ۳z}{۳}\Big|_{۰}^{۲+۴i}$$

$$=\frac{۱}{۳}\sin(۶+۱۲i)=\frac{۱}{۳}(\sin(۶)\cosh(۱۲)+i\sinh(۱۲)\cos(۶))$$

$$\bar{z}=x-iy=x-ix^{۲} \qquad dz=(۱+۲ix)dx$$

$$\int\bar{z}dz=\int_{۰}^{۲}(x-ix^{۲})(۱+۲ix)dx=\int_{۰}^{۲}(x+۲x^{۳}+ix^{۲})dx=(\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۴}}{۲}+\frac{ix^{۳}}{۳})\Big|_{۰}^{۲}=۱۰+\frac{۸i}{۳}$$

بنابراین:

$$\int(\cos ۳z+\bar{z})dz=\frac{۱}{۳}((۳۰+\sin(۶)\cosh(۱۲))+i(۸+\sinh(۱۲)\cos(۶)))$$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$f(z)=\frac{-۱}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{A}{z-۱}+\frac{B}{z-۲}=\frac{Az-۲A+Bz-B}{(z-۱)(z-۲)}$$

$$A+B=۰\rightarrow A=-B\ ,\ -۲A-B=-۱\rightarrow -۲A+A=-۱$$

$$-A=-۱\rightarrow A=۱\ ,\ B=-۱$$

$$\rightarrow f(z)=\frac{۱}{z-۱}-\frac{۱}{z-۲}$$

$$f_{۱}(z)=\frac{z^{-۱}}{۱-z^{-۱}}=\frac{۱}{z}.\frac{۱}{۱-\frac{۱}{z}}=\frac{۱}{z}(۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{z^{۲}}+\frac{۱}{z^{۳}}+\ldots)=\frac{۱}{z}+\frac{۱}{z^{۲}}+\frac{۱}{z^{۳}}+\frac{۱}{z^{۴}}+\ldots$$

$$|\frac{۱}{z}|<۱\rightarrow \underbrace{۱<|z|}_{(۱)}$$

$$f_۲(z)=\frac{۱}{z-۲}=\frac{۱}{۲(\frac{z}{۲}-۱)}=\frac{-۱}{۲(۱-\frac{z}{۲})}=\frac{-۱}{۲}(۱+\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۴}+\frac{z^۳}{۸}+\frac{z^۴}{۱۶}+\ldots)$$

$$|\frac{z}{۲}|<۱\to\underbrace{|z|<۲}_{(۲)}$$

$$(۱)\cap(۲)\Rightarrow ۱<|z|<۲$$

$$f(z)=f_۱(z)-f_۲(z)=(\frac{۱}{z}+\frac{۱}{z^۲}+\frac{۱}{z^۳}+\ldots)+\frac{۱}{۲}(۱+\frac{z}{۲}+\frac{z^۲}{۴}+\frac{z^۳}{۸}+\ldots)$$

۶) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

الف) ابتدا معادله خط را به دست می‌آوریم: $y-۰=\frac{۰-(-۱)}{۰-۳}(x-۰)\to y=\frac{-۱}{۳}x\to y+\frac{۱}{۳}x=۰$

$$\int_c(xy-۲i)(dz)=\int_c(xy-۲i)(dx+idy)=\int_c xydx+ixydy-۲idx+۲dy$$

$$=\int_c(xy-۲i)dx+\int_c(ixy+۲)dy$$

$$I_۱=\int_c(xy-۲i)dx\xrightarrow[y=\frac{-۱}{۳}x]{}\int_۰^۳[x(\frac{-۱}{۳}x)-۲i]dx=\int_۰^۳(\frac{-۱}{۳}x^۲-۲i)dx=\frac{-۱}{۳}\frac{x^۳}{۳}-۲ix\Big|_۰^۳$$

$$I_۱=\frac{-۱}{۹}(۲۷)-۲i(۳)=-۳-۶i$$

$$I_۲=\int_c(ixy+۲)dy\xrightarrow[x=-۳y]{}\int_۰^{-۱}[i(-۳y)(y)+۲]dy=\int_۰^{-۱}(-۳iy^۲+۲)dy$$

$$=\frac{-۳iy^۳}{۳}+۲y\Big|_۰^{-۱}=-i(-۱)-۲=i-۲$$

$$\to I=I_۱+I_۲=i-۲-۳-۶i=-۵-۵i$$

ب) $c:|z|=\frac{۳}{۲}$

$$\oint_c\frac{e^zdz}{(z-۳)(z+۱)^۲}:(z-۳)(z+۱)^۲=۰\begin{cases}z-۳=۰\to z=۳\notin c\\ \underbrace{(z+۱)^۲=۰\to z=-۱\in c}_{\text{قطب مرتبه دوم}}\end{cases}$$

$$\text{مانده } b|_{z=-۱}=\frac{۱}{(۲-۱)!}\lim_{z\to(-۱)}\frac{d}{dz}(\frac{e^z}{z-۳})=\lim_{z\to(-۱)}\frac{e^z(z-۳)-e^z}{(z-۳)^۲}=\frac{e^{-۱}(-۴)-e^{-۱}}{۱۶}=\frac{e^{-۱}(-۵)}{۱۶}$$

$$I=\oint_c\frac{e^zdz}{(z-۳)(z+۱)^۲}=۲\pi i(\frac{-۵}{۱۶e})=\frac{-۵\pi i}{۸e}$$

ج-۱)

$$I_۱=\int_۰^\infty\frac{\cos۳x}{(x^۲+۱)^۲}dx$$

Scanned by CamScanner

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i\{f(e)e^{i3z}$$ مجموع مانده‌های تابع به ازای نقاط تکین بالای محور x ها $\}]$

$$f(z)e^{i3z}=\frac{1}{(z^2+1)^2}e^{i3z}\rightarrow z^2+1=0\rightarrow z=\pm i\rightarrow z=i$$ قابل قبول $\rightarrow$ قطب مرتبه دوم

$$b_1\big|_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{3ie^{3iz}(z+i)^2-2(z+i)e^{i3z}}{(z+i)^4}=-ie^{-3}$$

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{2\pi i(\frac{-i}{e^3})\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\frac{2\pi}{e^3}\}=\frac{\pi}{e^3}$$

ج-۲)

$$I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos\theta+3}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3(1+\frac{2}{3}\cos\theta)}=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\frac{2}{3}\cos\theta}=\frac{1}{3}.\frac{2\pi}{\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}}$$

$$=(\frac{1}{3}).\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}}=\frac{1}{3}.\frac{2\pi\times 3}{\sqrt{5}}=\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف)

$$\oint_c\frac{z}{(z+i)^2(z-1)}dz \qquad c:|z|=3$$

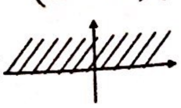
قطب‌های $z=1$ (از مرتبه یک) و $z=-i$ (از مرتبه دو) هر دو نقاط یکسان داخل ناحیه c هستند پس انتگرال مورد نظر برابر است با :

$$2\pi i(\mathop{\mathrm{Res}}_{z=1}\frac{z}{(z+i)^2(z-1)}+\mathop{\mathrm{Res}}_{z=-i}\frac{z}{(z+i)^2(z-1)})$$

$$=2\pi i(\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+i)^2}+\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-1}))=2\pi i(\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{-1}{(1+i)^2})=0$$

ب)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx\rightarrow f(x)=\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

c:  $\qquad I=\int_c f(z)e^{iz}dz$

قطب‌های $z=i$ و $z=2i$ هر دو از مرتبه اول داخل c قرار دارند.

$$I=2\pi i(\mathop{\mathrm{Res}}_{z=i}f(z)e^{iz}+\mathop{\mathrm{Res}}_{z=2i}f(z))e^{iz}$$

$$=2\pi i(\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i}+\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}\Big|_{z=2i}=2\pi i(\frac{e^{-1}}{6}-\frac{e^{-2}}{6})=\frac{\pi i}{3}(e^{-1}-e^{-2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx=\mathrm{Im}\,I=\frac{\pi}{3}(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2})$$

Scanned by CamScanner

ج) $\oint_{|z|=1}(\underbrace{e^{2z}\sin(3z)}_{f_1(z)}+\underbrace{z^2e^{\frac{1}{z}}}_{f_2(z)}+\underbrace{\mathrm{Im}(z)}_{f_3(z)})dz$

انتگرال $f_1(z)$ و $f_2(z)$ و $f_3(z)$ را جداگانه حساب کرده و سپس نتایج را جمع می بندیم.

$f_1(z)$: تابع تحلیلی است پس از روش‌های عادی و معمول انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.

$f_2(z)$: تابع زیر انتگرال به جز در نقاط محدودی تحلیلی است پس از روش مانده‌ها حل می‌کنیم.

$f_3(z)$: غیر تحلیلی است. پس از روش پارامتری منحنی c استفاده می‌کنیم.

$f_1(z)$: $c:|z|=1\ ,\ z=e^{i\theta}$

$$\oint_c f_1(z)dz=\frac{2e^{2z}\sin(3z)-3e^{2z}\cos(3z)}{2^2+3^2}$$

$$=\frac{e^{2e^{i\theta}}(2\sin(3e^{i\theta})-3\cos(3e^{i\theta}))}{13}\Bigg|_0^{2\pi}=0$$

$f_2(z)$:

$$\oint z^2e^{\frac{1}{2}}dz=2\pi i\,\underset{z=0}{\mathrm{Res}}(z^2e^{\frac{1}{2}})=2\pi i(\text{ضریب }\frac{1}{z})$$

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots\Rightarrow\oint z^2e^{\frac{1}{2}}dz=2\pi i(\frac{1}{3!})=\frac{\pi i}{3}$$

$f_3(z)$: $\oint \mathrm{Im}\,z\,dz\ ,\ z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\to|z|=1\Rightarrow z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

$$\mathrm{Im}\,z=\sin\theta\ ;\ dz=ie^{i\theta}d\theta=(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$$

$$\oint \mathrm{Im}\,z\,dz=\int_0^{2\pi}(\sin\theta)(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{\cos2\theta-1}{2}+i\frac{\sin2\theta}{2})d\theta=\frac{1}{2}(-\theta+\frac{\sin2\theta}{2}-\frac{i\cos2\theta}{2})\Bigg|_0^{2\pi}=-\pi$$

بنابراین:

$$\oint(e^{2z}\sin3z+z^2e^{\frac{1}{z}}+\mathrm{Im}\,z\,dz=\pi(-1+\frac{i}{3})$$

۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases}1-x & 0\le x\le1\\ 0 & x>1\end{cases}$، با توجه به انتگرال فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ می‌توان نوشت:

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{2}{\pi}\{\int_0^1(1-x)\cos\omega x dx\}=\frac{2}{\pi}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\pi}\{\frac{-1}{\omega^2}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\frac{1}{\omega^2}\}$$

ب)

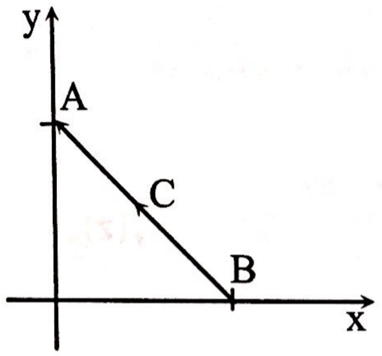
$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)\cos\omega x\,d\omega$$

$$f(0)=\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)\cos 0\,d\omega \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

الف) نقطه تکین عبارتند از $z=1$ که قطب مرتبه دوم می‌باشد و داخل دایره $|z|=2$ قرار دارد.

$$\operatorname{Res}\frac{e^{2z}-e^{z+1}}{(z-1)^3}\bigg|_{z=1}=\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}(e^{2z}-e^{z+1})=\lim_{z\to1}(4e^{2z}-e^{z+1})=3e^2\Rightarrow I=2\pi i(3e^2)=6\pi e^{2}i$$



ب)

$$z=x+iy\Rightarrow dz=dx+idy=(1-i)dx$$

$$\bar{z}=x-iy=x-i(i-x)=x(1+i)-i$$

$$I=\int_{AB}\bar{z}dz=\int_1^0 (x(1+i)-i)(1-i)dx$$

$$=(1-i)\left(\frac{x^2}{2}(1+i)-ix\right)\Big|_1^0=(1-i)\left(\frac{i-1}{2}\right)=i$$

ج)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz\right)$$

نقاط تکین تابع $\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ عبارتند از $z=1\pm3i$ که هر دو قطب مرتبه اول بوده و تنها $(z=1+3i)$ در نیم‌صفحه فوقانی واقع است.

$$\operatorname{Res}\frac{ze^{iz}}{(z-(1+3i))(z-(1-3i))}\bigg|_{z=1+3i}=\lim_{z\to1+3i}\frac{ze^{iz}}{z-1+3i}=\frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{6i}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{6i}(1+3i)e^{i}\right)=\frac{\pi}{3e^3}(1+3i)(\cos1+i\sin1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\operatorname{Im}(I)=\frac{\pi}{3e^3}(\sin1+3\cos1)$$

د)

$$\oint_{|z|=1}\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)dz=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos\frac{2}{z}}{2}dz=\oint_{|z|=1}\frac{1}{2}dz-\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\cos\frac{2}{z}dz=I_1-I_2=0$$

انتگرال یک تابع تحلیلی روی مسیر بسته صفر است پس $I_1=0$. تنها نقطه تکین تابع $\cos\frac{2}{z}$ نقطه $z=0$ است که از نوع تکین اساسی است و داخل $|z|=1$ قرار دارد. اما چون تابع $\cos\frac{2}{z}$ زوج است لذا مانده آن در $z=0$ صفر می‌باشد پس $I_2=0$.

Scanned by CamScanner

۱۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^4}((z-1)+3)\frac{1}{(z-1)+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^4}((z-1)+3)\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}}$$

$$|z-1|<4\Rightarrow\left|\frac{z-1}{4}\right|<1$$

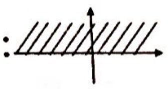
$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^4}\right)\left(1-\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2-\left(\frac{z-1}{4}\right)^3+\dots\right)$$

۱۱) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

الف)
$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int\frac{\sqrt{z}dz}{z}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sqrt{z}}{z}=2\pi i\lim_{z=0}\sqrt{z}=0$$

ب)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\int_c f(z)dz;f(z)=\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$

c: 

نقاط تکین $f(z)$ داخل ناحیه c: $z=i$ و $z=2i$
$$z^4+5z^2+4=0\Rightarrow z=\pm i,\pm 2i$$

$$I=\int_c f(z)dz=2\pi i\{\operatorname*{Res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2i}f(z)\}$$

$$=2\pi i\left\{\left.\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=i}+\left.\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=2i}\right\}=2\pi i\left(\frac{-2}{6i}+\frac{-5}{-12i}\right)=\frac{\pi}{6}$$

ج) تابع زیر انتگرال زوج است پس:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

تغییر متغیر: $z=e^{i\theta},d\theta=\frac{dz}{iz},\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z+1}=\frac{1}{i}(2\pi i)\operatorname{Res}\frac{1}{z^2+4z+1}=2\pi\left.\frac{1}{2z+4}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$z^2+4z+1=0\to z_1,z_2=-2\pm\sqrt{3}\to z=-2+\sqrt{3}$$ داخل دایره واحد

Scanned by CamScanner

۱۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

الف) نقاط تکین عبارتند از $z=0$ که تکین اساسی می‌باشد و درون دایره $|z|=2$ و نقاط $z=\pm i$ که قطب مرتبه اول هستند و درون دایره $|z|=2$.

$$\operatorname{Res}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}\Bigg|_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2+1}\left(z^2\left(1+\frac{1}{z^2}+\left(\frac{1}{z^2}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{1}{z^2}\right)^3\frac{1}{3!}+\dots\right)\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z^2+1}=1 \quad (1)$$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}\Bigg|_{z=i}\lim_{z\to i}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z+i}=\frac{e^{-1}}{2i} \quad (2)\ ,\ \operatorname{Res}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}\Bigg|_{z=-i}=\lim_{z\to -i}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-i}\frac{e^{-1}}{-2i} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)}\oint_{|z|=2}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}=2\pi i\left(1+\frac{1}{2ei}-\frac{1}{2ei}\right)=2\pi i$$

ب)

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{1}{5-4\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2z}{10z-4z^2-4}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{i}\int\frac{1}{-2z^2+5z-2}dz=\frac{1}{i}\int f(z)dz$$

نقاط تکین تابع $f(z)$ عبارتند از $z=\frac{1}{2},2$ که نقطه $z=\frac{1}{2}$ درون دایره واحد است.

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{5-4z}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}=(2\pi i)\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

ج)

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x dx}{(x^2-4x+5)^2}=\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2-4x+5)^2}dx\right)=\operatorname{Im}\left(2\pi i\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{(z^2-4z+5)^2}\right)$$

نقاط تکین تابع $\frac{e^{iz}}{(z^2-4z+5)^2}$ عبارتند از $z=2\pm i$ که مانده در نقطه تکین $z=2+i$ واقع در نیم‌صفحه فوقانی محاسبه می‌گردد.

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{(z^2-4z+5)^2}\Bigg|_{z=2+i}=\lim_{z\to 2+i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z-(2-i))^2}\right)$$

$$=\lim_{z\to 2+i}\frac{ie^{iz}(z-2+i)^2-2(z-2+i)e^{iz}}{(z-2+i)^4}=e^{2i-1}\left(\frac{-i}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}dz}{(z^2-4z+5)^2}=2\pi i\left\{\frac{-ie^{-1}}{2}(\cos 2+i\sin 2)\right\}=\frac{\pi}{e}(\cos 2+i\sin 2)$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x dx}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{\pi}{e}\sin 2$$

Scanned by CamScanner

۱۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

الف) $\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos\theta}{۳-۲\cos\theta}d\theta\ ,\ z=e^{i\theta}\to dz=izd\theta\to d\theta=\frac{dz}{iz}$

$$\cos\theta=\frac{z+\frac{۱}{z}}{۲}=\frac{z^{۲}+۱}{۲z}\to\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{۳-۲\cos\theta}=\oint\frac{\frac{z^{۲}+۱}{۲z}}{۳-۲(\frac{z^{۲}+۱}{۲z})}\frac{dz}{iz}$$

$$=\oint\frac{\frac{z^{۲}+۱}{۲z}}{\frac{۳z-z^{۲}-۱}{z}iz}dz=\oint\frac{\frac{z^{۲}+۱}{۲z}}{(۳z-z^{۲}-۱)i}dz=\oint\frac{z^{۲}+۱}{۲z(۳z-z^{۲}-۱)i}dz$$

$$۲z(۳z-z^{۲}-۱)=۰\to\begin{cases}z=۰\\ ۳z-z^{۲}-۱=۰\to\Delta=۹-۴(-۱)(-۱)=۵\end{cases}\to z=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{-۲}$$

مقدار مانده به ازای $z=۰\to b_{۱}=\left.\frac{z^{۲}+۱}{۲i(۳z-z^{۲}-۱)}\right|_{z=۰}=\frac{i}{۲}$

مقدار مانده به ازای $\frac{-۳+\sqrt{۵}}{-۲}$:

$$b_{۱}=\frac{(\frac{-۳+\sqrt{۵}}{-۲})^{۲}+۱}{۲(\frac{-۳+\sqrt{۵}}{-۲})(\frac{-۳+\sqrt{۵}}{-۲}-\frac{-۳-\sqrt{۵}}{-۲})i}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}i$$

$$=۲\pi i(\frac{i}{۲}+\frac{۳\sqrt{۵}}{۱۰}i)=-۷/۳۵۶$$

ب) $\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۲}+۴)}dx=\frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos xdx}{(x^{۲}+۱)^{۲}(x^{۲}+۴)}$

تابع مورد بررسی: $\frac{e^{iz}}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z^{۲}+۴)}$

$$(z^{۲}+۱)^{۲}(z^{۲}+۴)=۰\to\begin{cases}(z^{۲}+۱)^{۲}=۰\to z^{۲}=-۱\to z=\pm i\begin{cases}z=i & \text{قابل قبول}\to\text{قطب مرتبه دوم}\\ z=-i & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}\\ z^{۲}+۴=۰\to z=\pm۲i\to\begin{cases}z=-۲i & \text{غ ق ق}\\ z=۲i & \text{ق ق}\to\text{قطب مرتبه یک}\end{cases}\end{cases}$$

مقدار مانده به ازای $z=i$: $\to b_{۱}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i)^{۲}(z^{۲}+۴)}$

$$=\lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^{۲}(z^{۲}+۴)-[۲(z+i)(z^{۲}+۴)+۲z(z+i)^{۲}]e^{iz}}{[(z+i)^{۲}(z^{۲}+۴)]^{۲}}=\frac{-۱۶ie^{-۱}}{۱۴۴}=\frac{-i(۱۶)}{۱۴۴e}$$

مقدار مانده به ازای $z=۲i$: $b_{۱}=\lim_{z\to ۲i}\frac{e^{iz}}{(z^{۲}+۱)^{۲}(z+۲i)}=\frac{e^{i(۲i)}}{(۹)(۴i)}=\frac{e^{-۲}}{۳۶i}=\frac{-i}{۳۶e^{۲}}$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}Re\{۲\pi i(\frac{-i}{۳۶e^۲}-\frac{i(۱۶)}{۱۴۴e})\} = Re\{\pi i(-i)(\frac{۱}{۳۶e^۲}+\frac{۱۶}{۱۴۴e})\} = \pi(\frac{۱}{۳۶e^۲}+\frac{۱۶}{۱۴۴e})$$

ج)

$$\oint_{|z|=۱}[\underbrace{\frac{۱}{z(e^z-۱)}}_{I_۱}+\underbrace{z^۳\cosh(\frac{۱}{z})}_{I_۲}+\underbrace{(۳z-۱)^۲\sin z}_{I_۳}]dz$$

ابتدا باید ببینیم که $z=۰$ قطب مرتبه چندم است.

$$I_۱ = \int_{|z|=۱}\frac{۱}{z(e^z-۱)}dz \to \lim_{z\to ۰}\frac{z^m}{z(e^z-۱)} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \lim_{z\to ۰}\frac{mz^{m-۱}}{\underbrace{e^z-۱}_{۰}+ze^z}$$

$$\to \lim_{z\to ۰}\frac{mz^{m-۱}}{ze^z} \to m-۱=۱ \to m=۲$$ قطب مرتبه دوم

$$\lim_{z\to ۰}\frac{z^۲}{z(e^z-۱)} = \frac{z}{e^z-۱} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{H} \frac{۱}{e^z} = ۱$$ موجود و مخالف صفر

مقدار مانده به ازای $z=۰$:

$$\to b_۱ = \lim_{z\to ۰}\frac{d}{dz}[\frac{z}{e^z-۱}] = \lim_{z\to ۰}[\frac{e^z-۱-ze^z}{(e^z-۱)^۲}] = ۰$$

باید سری لوران $\cosh(\frac{۱}{z})$ را حول $z=۰$ پیدا کنیم.

$$I_۲ = \oint_{|z|=۱} z^۳\cosh(\frac{۱}{z})dz$$

$$\cosh(z) = ۱+\frac{z^۲}{۲!}+\frac{z^۴}{۴!}+\frac{z^۶}{۶!}+\dots \to \cosh(\frac{۱}{z}) = ۱+\frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{z^۲})+\frac{۱}{۴!}(\frac{۱}{z^۴})+\frac{۱}{۶!}(\frac{۱}{z^۶})+\dots$$

$$\to z^۳\cosh(\frac{۱}{z}) = z^۳+\frac{۱}{۲!}(z)+\frac{۱}{۴!}(\frac{۱}{z})+\frac{۱}{۶!}(\frac{۱}{z^۳})+\dots \to \text{مقدار مانده} = \frac{۱}{۴!} \to I_۲ = \frac{۲\pi i}{۴!}$$

$$I_۳ = \oint_{|z|=۱}\underbrace{(۳z-۱)^۲\sin z}_{\text{تابع تحلیلی}}dz = ۰$$

مسیر بسته $|z|=۱$

$$\Rightarrow I = I_۱+I_۲+I_۳ = \frac{۲\pi i}{۴!}$$

۱۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / شهریور ماه ۱۳۹۱

الف) نقاط یکسان داخل ورودی ناحیه c، $z=۰$ و $z=۱$ می‌باشد.

$$\underset{z=۰}{Res}\{\frac{۱}{z}\cos(\frac{۱}{z-۱})\} = \lim_{z\to ۰} z\times\frac{۱}{z}\cos(\frac{۱}{z-۱}) = \cos(۱)$$

$$\frac{۱}{z}\cos(\frac{۱}{z-۱}) = \frac{۱}{۱+(z-۱)}\cos(\frac{۱}{z-۱}) \quad ; \quad |z-۱|<۱$$

$$=(\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(z-۱)^n)(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲n)!(z-۱)^{۲n}})$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \text{ضریب}\ \frac{1}{z-1} = \frac{(-1)(-1)}{2!} + \frac{(-1)(+1)}{4!} + \frac{(-1)(-1)}{6!} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4m-2)!} - \frac{1}{(4m)!}\right)$$

$$\oint \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)dz = 2\pi i\left((\cos(1) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4m-2)!} - \frac{1}{(4m)!}\right)\right)$$

ب)

$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$ و $\pm i$

هر چهار نقطه تکین داخل c قرار دارند با این توضیح که نقطه $z=1$ دوبار داخل ناحیه c قرار گرفته است. هم چنین اگر ناحیه بسته c در جهت عقربه‌های ساعت باشد باید Res در $-2\pi i$ ضرب شود و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت در $+2\pi i$.

$$\oint \frac{dz}{z^4-1} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) + 2\times 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$$

$$= \frac{-2\pi i}{4z^3}\bigg|_{z=i} + \frac{2\pi i}{4z^3}\bigg|_{z=-i} = \frac{4\pi i}{4z^3}\bigg|_{z=1} - \frac{2\pi i}{4z^3}\bigg|_{z=-1} = \frac{-2\pi i}{-4i} + \frac{2\pi i}{4i} + \frac{4\pi i}{4} - \frac{2\pi i}{-4} = \pi + \frac{3\pi}{2} i$$

۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

ابتدا به محاسبه انتگرال روبرو می‌پردازیم:

$$I = \int_C \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{i3z} dz \ , \ C: \operatorname{Im}(z) > 0$$

تنها نقطه تکین داخل C قطب $z=i$ و از مرتبه ۲ می‌باشد پس:

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i}\left\{\frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}\right\} = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}\right) = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{i3z}}{(z+1)^2}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{3ie^{i3z}(z+i) - 2e^{i3z}}{(z+1)^3} = 2\pi i \frac{e^{-3}(-8)}{-8i} = 2\pi e^{-3}$$

بنابراین انتگرال مورد نظر برابر خواهد بود با:

$$\int \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}dx = \operatorname{Re}(I) = \frac{2\pi}{e^3}$$

۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$\int (z^3 + \sin z)dz = \left(\frac{z^4}{4} - \cos z\right)\bigg|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^4}{4} - \cos(1+i) + 1 = -\cos(1+i)$$

۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} \pm \dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)z^{2n}} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} \pm \dots$$

$$f(z)=-1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{4!z^4}\pm\dots$$

با توجه به این‌که نمی‌توان برای $f(z)$ در نقطه $z=z_0=0$ هیچ mای پیدا کرد به طوری که:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\neq 0,\infty$$

پس $z=0$ یک نقطه تکین تنهای اساسی تابع $f(z)$ است.

۱۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه / پایان‌ترم دوم ۹۰-۱۳۸۹

الف) تنها تکین داخل C نقطه $z=0$ و از مرتبه ۲ است پس:

$$\int_C \frac{1}{z^2}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^2}\right)=2\pi i\lim\frac{d}{dz}\left(z^2\times\frac{1}{z^2}\right)=0$$

ب) تنها نقطه تکین داخل دایره واحد $z=0$ است پس:

$$z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\sum\frac{1}{n!z^n}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\dots$$

$$\sum z^2e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^2e^{\frac{1}{z}}\right)=2\pi i\times\left(\text{ضریب }\frac{1}{z}\right)=2\pi i\times\frac{1}{3!}=\frac{\pi i}{3}$$

ج) نقاط تکین داخل دایره $|z|=2$ نقاط $z=0$ و $z=-1$ می‌باشند:

$$\oint_{|z|=2}\frac{z^2+1}{z(z+1)}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-1}f(z)\right)=2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z+1}+\lim_{z\to -1}\frac{z^2+1}{z}\right)=2\pi i(1+(-2))=-2\pi i$$

د)

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}z=e^{i\theta},\ d\theta=\frac{dz}{iz},\ \cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{(iz)\left(2\sqrt{2}-\frac{z+v_z}{2}\right)}=\int\frac{2i}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz$$

نقاط تکین $z=\sqrt{2}\pm1$ که تنها $z=\sqrt{2}-1$ داخل دایره واحد است. پس انتگرال بالا برابر است با:

$$2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1}\left(\frac{2i}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\right)=2\pi i\left.\frac{2i}{2z-2\sqrt{2}}\right|_{z=\sqrt{2}-1}=2\pi$$

ه)

$$z=x+iy\xrightarrow{y=x^2}z=x+ix^2,\ dz=(1+2xi)dx$$

$$\int\frac{2}{z}dz=\int_0^1\frac{2}{x+ix^2}(1+2xi)dx=\int_0^1\frac{2}{x}\frac{1-ix}{1+x^2}(1+2xi)dx$$

$$=\int_0^1\frac{2}{x(1+x^2)}((1+2x^2)+ix)dx=\int_0^1\frac{2(1+2x^2)}{x(1+x^2)}dx+i\int_0^1\frac{2}{x+x^3}dx$$

$$=2\int\left(\frac{1+3x^2}{x+x^3}-\frac{x}{1+x}\right)dx+i\int_0^1\frac{2}{x+x^3}dx=\left.\left(\ln x^2(1+x^2)+2i\,tg^{-1}x\right)\right|_0^1=\ln2-\ln0+\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{2}+\infty$$

Scanned by CamScanner

۱۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

الف)

$$I_۱=\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{۲+\cos\theta}=\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{۲(۱+\frac{۱}{۲}\cos\theta)}=\frac{۱}{۲}\int_۰^{۲\pi}\frac{d\theta}{۱+\frac{۱}{۲}\cos\theta}=(\frac{۱}{۲})\frac{۲\pi}{\sqrt{۱-(\frac{۱}{۲})^۲}}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$$

ب)

$$I_۲=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ۲x dx}{x^۴+۵x^۲+۴}\to g(z)=\frac{e^{j۲z}}{z^۴+۵z^۲+۴}\to z^۴+۵z^۲+۴=۰$$

$$\to (z^۲+۴)(z^۲+۱)=۰\begin{cases} z^۲=۴\to z=\pm ۲j\to z=۲j & \text{ق ق}\\ z^۲=-۱\to z=\pm j\to z=j & \text{ق ق}\end{cases}$$

مقدار مانده به ازای قطب مرتبه یک $z=۲j\to \lim_{z\to ۲j}\frac{e^{j۲z}}{(z^۲+۱)(z+۲j)}=\frac{e^{-۴}}{(-۳)(۴j)}=\frac{-۱}{۱۲e^۴j}$

مقدار مانده به ازای قطب مرتبه یک $z=j\to \lim_{z\to j}\frac{e^{j۲z}}{(z+j)(z^۲+۴)}=\frac{e^{-۲}}{(۲j)(۳)}=\frac{۱}{۶je^{+۲}}$

$$\to I_۲=Re[۲\pi j(\frac{-۱}{۱۲e^۴j}+\frac{۱}{۶je^۲})]=Re[\frac{-\pi}{۶e^۴}+\frac{\pi}{۳e^۲}]=\frac{\pi}{۳e^۲}-\frac{\pi}{۶e^۴}$$

ج)

$$I_۳=\oint_{|z|=۱}(\underbrace{\frac{\bar z}{z}}_{I_۱}+\underbrace{z^۲e^{\frac{۱}{z}}}_{I_۲}+\underbrace{\cos z}_{I_۳})dz$$

$$I_۱=\oint_{|z|=۱}\frac{\bar z}{z}dz\xrightarrow[z=re^{j\theta}]{\bar z=re^{-j\theta}}\int_۰^{۲\pi}\frac{e^{-j\theta}}{e^{j\theta}}je^{j\theta}d\theta=j\int_۰^{۲\pi}e^{-j\theta}d\theta=j(\frac{-۱}{j}e^{-j\theta}\Big|_۰^{۲\pi})=-e^{-j\theta}\Big|_۰^{۲\pi}=۰$$

$$r=۱\to z=e^{j\theta}\to dz=je^{j\theta}d\theta$$

$I_۲=\oint_{|z|=۱}z^۲e^{\frac{۱}{z}}dz\to z=۰\to$ نقطه غیر تحلیلی

$e^{\frac{۱}{z}}\xrightarrow[\text{حول } z=۰]{\text{سری تیلور}}۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{z})^۲+\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{z})^۳$

$$\Rightarrow z^۲[۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{z})^۲+\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{z})^۳+\dots]$$

$$z^۲+z+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{z})+\dots$$

می‌خواهیم با استفاده از سری لوران حل کنیم.

$$I_۲=۲\pi j(\frac{۱}{۳!})=\frac{۲\pi j}{۳\times۲\times۱}=\frac{\pi j}{۳}$$

$$I_۳=\oint_{|z|=۱}\underbrace{\cos z dz}_{\text{یک تابع تحلیلی}}dz=۰\to I=I_۱+I_۲+I_۳=\frac{\pi j}{۳}$$

Scanned by CamScanner

۲۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}dw \to I=\int_c \frac{e^{ixz}}{1+z^2}dz \ , \ c:\text{Im}\,z>0$$

$$\underset{z\to i}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{ixz}}{z^2+1}=\frac{e^{-x}}{2i}\Rightarrow I=2\pi i(\sum \text{Res}\,f(z))=2\pi i(\frac{e^{-x}}{zi})=\pi e^{-x}$$

حال با توجه به زوج بودن تابع زیر انتگرال یعنی $\frac{\cos wx}{1+w^2}$ داریم:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}dw=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}dw=\frac{1}{2}\text{Res}\{I\}=\frac{\pi}{2}e^{-x}$$

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

الف) برای این‌که بتوانیم از روش مانده‌ها استفاده کنیم جایگزینی زیر را انجام می‌دهیم.

$$\bar{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{9}{z}\Rightarrow \oint(\frac{1}{z-1}\cos\frac{1}{z}+\frac{9}{z^2})dz$$

برای به‌دست آوردن مانده در $z=0$ از بسط $\frac{1}{z-1}$ (که شرط آن در این‌جا برقرار است یعنی $|z|<1$) و

بسط $\cos\frac{1}{z}$ استفاده می‌کنیم: $(-1-z-z^2-z^3-\dots)(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}\pm\dots)+\frac{9}{z^2}$

ضریب $\frac{1}{z}$ می‌شود: $\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}\pm\dots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}=1-\cos 1$

$$\underset{z=0}{\text{Res}}\,f(z)=1-\cos 1 \ , \ \underset{z=1}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)(\frac{1}{(z-1)}\cos\frac{1}{z}+\frac{9}{z^2})=\cos 1$$

بنابراین:

$$\oint(\frac{1}{z-1}\cos\frac{1}{z}+\frac{z}{z})dz=2\pi i\sum \text{Res}=2\pi i$$

ب)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx \to I=\int_c\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz \ , \ c:\text{Im}\,z>0$$

$$\underset{z=i}{\text{Res}}\,f(z)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)-2e^{iz}}{(z+i)^3}=\frac{e^{-1}}{2i}$$

$$I=2\pi i\,\text{Res}\,f(z)=\pi e^{-1}\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx=\text{Re}(I)=\pi e^{-1}$$

ج) با فرض $z=e^{i\theta}$ می‌یابیم:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \ , \ \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}) \ , \ d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

بنابراین:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{-\frac{1}{4}(z-\frac{1}{z})^2}{5-\frac{4}{2}(z+\frac{1}{z})}.\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{8i}\oint_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)(z-\frac{1}{2})}dz$$

Scanned by CamScanner

$$=\frac{۱}{۸i}۲\pi i\sum_i \operatorname{Res}\left(\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}\right)\Bigg|_{z_i}$$ (نقاط تکین واقع در داخل دایره واحد)

$$=\operatorname{Res}\left(\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}\right)\Bigg|_{z=\frac{۱}{۲}}=\lim_{z\to\frac{۱}{۲}}(z-\frac{۱}{۲})\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}=-\frac{۳}{۲}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}\right)\Bigg|_{z=۲}=\lim_{z\to۲}(z-۲)\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}=\frac{۳}{۲}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}\right)\Bigg|_{z=۰}=\lim_{z\to۰}\frac{d}{dz}z^۲\left(\frac{z^۴-۲z^۲+۱}{z^۲(z-۲)(z-\frac{۱}{۲})}\right)=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow\int_۰^{۲\pi}\frac{\sin۲\theta}{۵-۴\cos\theta}d\theta=\frac{۱}{۸i}\times۲\pi i(-\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲})=\frac{۵\pi}{۸}$$

۲۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۸

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸–۱۳۸۷

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۸–۱۳۸۷

الف)
$$\oint_{|z|=۲}\frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}dz=\oint_{|z|=۲}f(z)dz=۲\pi i(\operatorname{Res}f(z)|_{z=۰}+\operatorname{Res}f(z)|_{z=۱})$$

$z=۰$ و $z=۱$، نقاط تکین واقع در ناحیه درون $|z|=۲$ هستند که با توجه به صفر شدن صورت در نقطه $z=۰$، هر دو قطب مرتبه اول می‌باشند. بنابراین برای محاسبه مانده در این نقاط داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)|_{z=۰}=\lim_{z\to۰}z\frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{قاعده هوپیتال}}\lim_{z\to۰}\frac{e^z-۱}{۱-z-z}=۰$$

$$\operatorname{Res}f(z)|_{z=۰}=\lim_{z\to۰}z\frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}=\frac{۰}{۰}\longrightarrow\lim_{z\to۰}\frac{e^z-۱}{۱-z-z}=۰$$

$$\operatorname{Res}f(z)|_{z=۱}=\lim_{z\to۱}(z-۱)\frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}=۲-e$$

$$\Rightarrow\oint_{|z|=۲}\frac{e^z-۱-z}{z^۲(۱-z)}=۲\pi i(۰+۲-e)=۲\pi i(۲-e)$$

ب)

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta = \int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \int_0^\pi \frac{2d\theta}{3-\cos 2\theta} \overset{2\theta=\alpha}{=\!=} \int_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{3-\cos\alpha}$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz(3-\frac{z^2+1}{2z})} = \oint_{|z|=1}\frac{2dz}{i(6z-z^2-1)}$$

$$z^2+1-6z=0 \to z=\frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}=3\pm 2\sqrt{2}$$

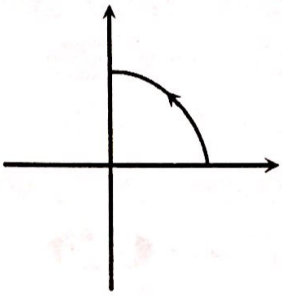
تنها $z=3-2\sqrt{2}$ در دایره یکه قرار دارد. پس

$$\underset{z=3-2\sqrt{2}}{\operatorname{Res}}\ \frac{2}{i(6z-z^2-1)} = \frac{z}{4\sqrt{2}i} = \frac{1}{i2\sqrt{2}}$$

در نتیجه

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2\theta}d\theta = 2\pi i\times\left(\frac{1}{2i\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

۲۵) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷



الف) روی این مسیر $|z|=2$ است. بنابراین:

$$\int_c(|z|^2+z^2)dz = \int_c(4+z^2)dz = 4z\Big|_2^{2i}+\frac{1}{3}z^3\Big|_2^{2i} = -\frac{32}{3}+i\frac{16}{3}$$

ب) نقطه تکین $z=0$ از تابع $g(z)=\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}$، درون ناحیه بیضی c نیست و بسته به مقدار w، تکین $z=w$ می‌تواند درون بیضی c باشد و یا نباشد. با فرض اینکه این قطب در بیضی c باشد، داریم:

$$\operatorname{Res} g(z)|_{z=w} = \lim_{z\to w}(z-w)\frac{z^2-z+1}{z(z-w)} = \frac{w^2-w+1}{w} \Rightarrow f(w)=2\pi i\frac{w^2-w+1}{w}$$

و به ازای مقادیری از w، که تکین تابع در خارج از بیضی c است، تابع $g(z)$ در این بیضی، تحلیلی و در نتیجه حاصل انتگرال، صفر است. یعنی:

$$f(w)=0$$

بنابراین با توجه به عبارت حاصل شده برای $f(w)$، برای محاسبه $f'(5)$، از ضابطه‌ای استفاده می‌کنیم که w در خارج از بیضی c است. چون که $w=5$ در خارج این بیضی است و داریم:

$$f'(w)|_{w=5}=0$$

ج) تابع زیر انتگرال $f(z)=(1-\cos z)e^{\frac{1}{z}}$، تنها در $z=0$ دارای قطب اساسی است. برای محاسبه مانده متناظر با این قطب از بسط لوران حول این نقطه استفاده می‌کنیم:

$$(1-\cos z)e^{\frac{1}{z}} = \left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots\right)\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \frac{1}{z} \text{ ضریب} = \operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0} = \frac{1}{2!3!} - \frac{1}{4!5!} + \frac{1}{6!7!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} (1-\cos z) e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!(2k+1)!}$$

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۸-۱۳۸۷

الف)

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\frac{z}{2})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2^n}{z^n}\right), \quad |z| > 2$$

ب-۱) این تابع دارای قطب‌های مرتبه اول در $z = 0$ و $z = \pm 2i$ است. مانده‌های متناظر با این قطب‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z^2+4)} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=2i} = \lim_{z\to 2i} (z-2i) \frac{\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{\sin(2i)}{-16i} = -\frac{\sinh(2)}{16}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=-2i} = \lim_{z\to -2i} (z+2i) \frac{\sin z}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \frac{\sin(-2i)}{16i} = \frac{-\sinh(2)}{16}$$

ب-۲) قطب تابع $z = -2$ است که یک نقطه تکین منفرد است. مانده متناظر با آن را می‌یابیم. از بسط لوران تابع استفاده می‌کنیم. اگر $z + 2 = t$ فرض شود، تابع $g(z)$ به صورت $g(t) = (t-5)\sin\frac{1}{t}$ نوشته می‌شود. هدف محاسبه مانده تابع در نقطه تکین اساسی $t = 0$ است که با توجه به بسط لوران تابع $g(t) = (t-5)(\frac{1}{t} - \frac{1}{3!t^3} + \frac{1}{5!t^5} - \ldots)$ حول این نقطه ملاحظه می‌شود:

$$\frac{1}{t} \text{ ضریب} = \operatorname{Res}\big|_{t=0} = -5$$

۲۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷

الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \operatorname{Re}\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res} \frac{1}{1+z^2} e^{i3z}\}$$

$$\operatorname{Res} \frac{1}{1+z^2} e^{i3z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-3}}{2i} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+1} dx = \operatorname{Re}\{2\pi i . \frac{e^{-3}}{2i}\} = \pi e^{-3}$$

ب)

$$\oint_{|z|=2} \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} = 2\pi i \sum_{\substack{i \\ \text{داخل دایره } |z|=2}} \operatorname{Res} \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}\Big|_{z_i}$$

نقاط تکین تابع، $z=1$ و $z=0$ است. $z=1$ قطب مرتبه دو و $z=0$ تکین اساسی تابع است.

بنابراین برای محاسبه مانده در $z=0$ از بسط لوران تابع استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{(z-1)^2}ze^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z}\cdot ze^{\frac{1}{z}}=(1+z+z^2+\dots)(1+z+z^2+\dots)(z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{4!z^3}+\dots)$$

با کمی دقت به حاصلضرب بالا، ضرایب $\frac{1}{z}$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$1\frac{1}{2!}+2\frac{1}{3!}+3\frac{1}{4!}+\dots=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

با توجه به اینکه $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ و $\frac{d}{dx}(e^x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=-1-1+1+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=-2+e^1\\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}=-1+1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}=-1+e^1\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=-1+e-(-2+e)=1$$

بنابراین مقدار مانده در نقطه $z=0$، برابر ۱ است و

$$\text{Res}\left.\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}\right|_{z=1}=\left.\frac{d}{dz}(ze^{\frac{1}{z}})\right|_{z=1}=e-e=0\Rightarrow\oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2}dz=2\pi i(1+0)=2\pi i$$

۲۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

الف)
$$I=\oint_{|z|=1}(\frac{\tan z}{z}+\frac{\bar z}{|z|})dz=\oint_{|z|=1}(\frac{\tan z}{z}+\frac{1}{z})dz=2\pi i\sum \text{Res}f(z)|_{z=z_i}$$

قطب‌های تابع، $z=0$ و $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ است که تنها $z=0$ در دایره $|z|=1$ قرار دارد. بنابراین مقدار مانده تابع متناظر با این قطب را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Res}f(z)|_{z=0}=\lim_{z\to 0}z(\frac{\tan z}{z}+\frac{1}{z})=1\Rightarrow I=2\pi i$$

ب) مانده متناظر با قطب اساسی $z=0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\sin^2\frac{1}{z}=\frac{1-\cos\frac{2}{z}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-\frac{(\frac{2}{z})^2}{2!}+\frac{(\frac{2}{z})^4}{4!}-+\dots)$$

$$\text{ضریب }\frac{1}{z}\Rightarrow \text{Res}\sin^2\frac{1}{z}|_{z=0}=0\Rightarrow\oint_{|z|=1}\sin^2\frac{1}{z}dz=0$$

ج) با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

Scanned by CamScanner

$$\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱+\sin\theta}{۳+\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=۱}\frac{-(z+i)^{۲}}{z(z^{۲}+۶z+۱)}dz=۲\pi i\sum_{i=۱}^{۲}Resf(z)|_{z=z_i}$$

مانده متناظر با دو قطب $z=۰$ و $z=-۳+\sqrt{۸}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$Resf(z)|_{z=۰}=\lim_{z\to ۰}zf(z)=۱$$

$$Resf(z)|_{z=-۳+\sqrt{۸}}=\lim_{z\to -۳+\sqrt{۸}}(z-(-۳+\sqrt{۸})f(z))\Rightarrow\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱+\sin\theta}{۳+\cos\theta}d\theta=\frac{۴\pi(۳-\sqrt{۸})}{۱۶-۶\sqrt{۸}}$$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$f(z)=\frac{z-۵}{(z+۳)(z-۱)}=\frac{۲}{z+۳}-\frac{۱}{z-۱}=\frac{\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{z}{۳}}+\frac{۱}{۱-z}$$

$$=\frac{۲}{۳}\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{z}{۳})^{n}+\sum_{n=۰}^{\infty}z^{n}=\sum_{n=۰}^{\infty}z^{n}(\frac{۲}{۳^{n+۱}}+۱)\ ,\ |z|<۱$$

۳۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

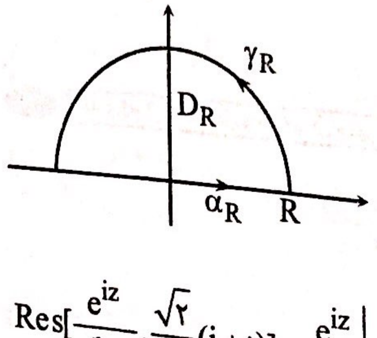
الف)

$$\oint_{|z-۱|=۲}\frac{e^{z}}{(z-۱)^{۱۰۰}}dz=\frac{۲\pi i}{۹۹!}\frac{d^{۹۹}}{dz^{۹۹}}(e^{z})\Big|_{z=۱}=\frac{۲\pi i}{۹۹!}e$$

ب) $z=۰$، تنها نقطه تکین این تابع است. برای محاسبه مانده تابع در این نقطه از بسط لوران تابع استفاده می‌کنیم، اما با توجه به اینکه این تابع زوج است؛ در بسط لوران آن، فقط توان‌های زوج z و $\frac{۱}{z}$ ظاهر می‌شود. بنابراین ضریب $\frac{۱}{z}$ که همان مانده تابع در نقطه تکین $z=۰$ است، برابر صفر می‌باشد. بنابراین:

$$\oint_{|z|=۱}\frac{e^{(z^{۲}+\frac{۱}{z^{۲}})}}{z^{۲}}dz=۲\pi i Res\frac{e^{(z^{۲}+\frac{۱}{z^{۲}})}}{z^{۲}}\Bigg|_{z=۰}=۲\pi i(۰)=۰$$

ج) از تابع $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}$ روی مرز D_R که نیم‌دایره‌ای به شعاع R است انتگرال می‌گیریم:



$$z^{۴}+۱=۰\Rightarrow z^{۴}=-۱=e^{\pi i}\Rightarrow z=e^{i\frac{\pi}{۴}},e^{\frac{۳\pi}{۴}i},e^{\frac{۵\pi}{۴}i},e^{\frac{۷\pi}{۴}i}$$

که از این نقاط تنها $e^{i\frac{\pi}{۴}}$ و $e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$ در D_R هستند و هر دو قطب ساده می‌باشند. بنابراین:

$$Res[\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱},\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+۱)]=\frac{e^{iz}}{۴z^{۳}}\Big|_{z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+۱)}=\frac{e^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-۱)}}{۲\sqrt{۲}(i-۱)}\quad ,\quad \begin{cases}e^{i\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+۱)\\ e^{۳i\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-۱)\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱},\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-۱)\right]=\left.\frac{e^{iz}}{۴z^{۳}}\right|_{z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-۱)}=\frac{e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+۱)}}{۲\sqrt{۲}(i+۱)}$$

بنا به قضیه مانده‌ها داریم:

$$\int_{\partial D_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}dz=\frac{e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i+۱)}}{۲\sqrt{۲}(i+۱)}+\frac{e^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(i-۱)}}{۲\sqrt{۲}(i-۱)}$$

$$=\frac{-e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{۲\sqrt{۲}}\left[\frac{(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲})(i-۱)+(\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲})(i+۱)}{۲}\right]۲\pi i$$

$$=\frac{-e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}i}{۲\sqrt{۲}}\left[\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]۲\pi i=\frac{e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\pi}{\sqrt{۲}}\left[\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$$

حال داریم:

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}dz\right|\le\frac{۱}{R^{۴}-۱}\pi R\sim\frac{۱}{R^{۳}}$$

و چون α_R روی محور حقیقی است:

$$\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^{۴}+۱}dx$$

داریم:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial D_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}dz+\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_R}\frac{e^{iz}}{z^{۴}+۱}dz$$

حد انتگرال اول سمت راست صفر می‌شود و انتگرال دوم هم برابر است با $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x^{۴}+۱}dx$.

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x^{۴}+۱}dx=\frac{e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\pi}{\sqrt{۲}}\left[\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$$

و چون قسمت‌های حقیقی دو طرف باید با هم برابر باشند، پس

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{۴}+۱}dx=\frac{e^{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\pi}{\sqrt{۲}}\left[\sin\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\cos\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$$

۳۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

$$f(z)=\frac{۱}{z^{۲}+۱}=\frac{-\frac{۱}{۲i}}{z+i}+\frac{\frac{۱}{۲i}}{z-i}$$

$$\frac{۱}{۲i}\frac{۱}{z-i}=\frac{۱}{۲i}\frac{۱}{(z+i)-۲i}=\frac{۱}{۲i}\frac{۱}{-۲i}\frac{۱}{۱-\frac{z+i}{۲i}}=\frac{۱}{۴}\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{z+i}{۲i}\right)^{n}\quad,\quad |z+i|<۲$$

$$\frac{1}{2i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{2i}\frac{1}{(z+i)-2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}\left(\frac{1}{1-\frac{2i}{z+i}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i(z+i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z+i}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i^{n-1}}{(z+i)^{n+1}}\quad ,\quad |z+i|>2$$

$$\Rightarrow f(z)=\begin{cases}-\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n & |z+i|<2\\ -\frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^{n-1}}{(z+i)^{n+1}} & |z+i|>2\end{cases}$$

۳۲) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

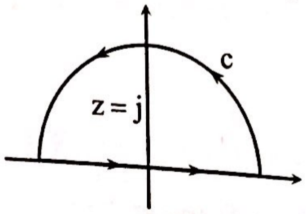
الف) $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^6+1}dx\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx=2\pi i(\sum Resf(z)$ (به ازای نقاط تکین بالای محور xها)

$$f(z)=\frac{1}{z^6+1}=\frac{1}{(z^3+i)(z^3-i)}\Rightarrow\begin{cases}z^3+i=0\to z^3=-i\to z=i\to(z-i)(z^2-1+zi)\\ z^3-i=0\to z^3=i\to z=-i\to(z+i)(z^2-1-zi)\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{(z-i)(z^2-1+zi)(z+i)(z^2-1-zi)}$$

نقاط تکین بالای محور xها را می‌خواهیم. از میان $z=\pm i$ همان $(z-i)$ را در نظر می‌گیریم که بالای محور xها است. $z=i$ قطب مرتبه اول است.

$$b_1=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z^2-1+zi)(z+i)(z^2-1-zi)}=\frac{1}{(-1-1-1)(2i)(-1-1+1)}=\frac{1}{6i}$$



$$\Rightarrow I=\oint_C f(z)dz=2\pi i\left(\frac{1}{6i}\right)=\frac{\pi}{3}$$

مسیری که انتگرال f(z) را روی آن می‌گیریم.

ب) $\oint_C\left(\frac{2z+\pi i}{e^{2z}+1}+\frac{z^2}{\sin z}\right)dz=\oint_C\frac{2z+\pi i}{e^{2z}+1}dz+\oint\frac{z^2}{\sin z}dz\qquad C:|z|=2$

$$I_1=\oint_C\frac{2z+\pi i}{e^{2z}+1}dz=2\pi i\left(b_1\Big|_{z=\frac{\pi}{2}i}+b_1\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}i}\right)$$

ابتدا نقاط تکین این تابع را پیدا می‌کنیم:

$$e^{2z}+1=0\to e^{2z}=-1\to e^{2x+2iy}=e^{i(\pm\pi)}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 2y=\pm\pi\to y=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}\to\begin{cases}z=\frac{\pi}{2}i\\ z=-\frac{\pi}{2}i\end{cases}$$

۱) محاسبه مقدار مانده به ازای $z=\frac{\pi}{۲}i$.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{۲}i}\frac{(z-\frac{\pi}{۲}i)^m(۲z+\pi i)}{e^{۲z}+۱}=\frac{۰}{۰}$$

ابتدا باید پیدا کنیم که قطب مرتبه چند است.

$$\xrightarrow{H}\lim_{z\to\frac{\pi}{۲}i}\frac{m(z-\frac{\pi}{۲}i)^{m-۱}(۲z+\pi i)+۲(z-\frac{\pi}{۲}i)^m}{۲e^{۲z}}=\frac{m(z-\frac{\pi}{۲}i)^{m-۱}(۲\pi i)}{-۲}\Rightarrow m=۱$$

m باید مساوی یک باشد تا حاصل حد (۰) نشود. پس $z=\frac{\pi}{۲}i$ قطب مرتبه اول است.

$$b_۱\Big|_{z=\frac{\pi}{۲}i}=\lim_{z\to\frac{\pi}{۲}i}\frac{(z-\frac{\pi}{۲}i)(۲z+\pi i)}{e^{۲z}+۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{z\to\frac{\pi}{۲}i}\frac{(۲z+\pi i)+۲(z-\frac{\pi}{۲}i)}{۲e^{۲z}}=\frac{۲\pi i}{۲(-۱)}=-\pi i$$

۲) محاسبه مقدار مانده به ازای $z=-\frac{\pi}{۲}i$ ریشه صورت $۲z+\pi i=۰\to z=-\frac{\pi}{۲}i$

$$f(z)=\frac{۲z+\pi i}{e^{۲z}+۱}\Rightarrow f(-\frac{\pi}{۲}i)=\frac{۰}{۰}\ ;\ \lim_{z\to-\frac{\pi}{۲}i}\frac{۲z+\pi i}{e^{۲z}+۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{z\to-\frac{\pi}{۲}i}\frac{۲}{۲e^{۲z}}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

$z=-\frac{\pi}{۲}i$ یک نقطه تکین برداشتنی است و برای یک نقطه تکین برداشتنی مقدار مانده برابر صفر است.

$$I_۱=(۲\pi i)(-\pi i+۰)=۲\pi^۲$$

$I_۲=\oint_C\frac{z^۲}{\sin z}dz\Rightarrow$ نقطه غیر تحلیلی $z=۰$

$$\frac{z^۲}{\sin z}\Big|_{z=۰}=\frac{۰}{۰}\ ;\ \lim_{z\to۰}\frac{z^۲}{\sin z}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{z\to۰}\frac{۲z}{\cos z}=۰$$

$z=۰$ هم نقطه تکین برداشتنی است و مقدار مانده به ازای آن هم صفر می‌شود. $\Rightarrow I=I_۱+I_۲=۲\pi^۲$

ج) مانده متناظر با قطب اساسی $z=۱$ را می‌یابیم:

$$\sin(\frac{z}{z-۱})\overset{z-۱=t}{=\!=\!=}\sin(\frac{t+۱}{t})=\sin(۱+\frac{۱}{t})=\sin(۱).\cos(\frac{۱}{t})+\cos(۱).\sin(\frac{۱}{t})$$

$$=\sin(۱).(۱-\frac{۱}{۲!t^۲}+\frac{۱}{۴!t^۴}-....)+\cos(۱).(\frac{۱}{t}-\frac{۱}{۳!t^۳}+\frac{۱}{۵!t^۵}-...)$$

$$\text{ضریب }\frac{۱}{t}=\text{Res}\sin(\frac{z}{z-۱})\Big|_{z=۱}=\cos(۱)\Rightarrow\oint_{|z|=\frac{۳}{۲}}\sin(\frac{z}{z-۱})dz=۲\pi i\cos(۱)$$

Scanned by CamScanner

د) $f(\theta)$ یک تابع زوج است.

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} \Rightarrow \underset{\theta=\alpha-\pi}{-\pi<\theta<\pi} \xrightarrow{+\pi} \underset{d\theta=d\alpha}{0<\theta+\pi<2\pi} \to \alpha=\theta+\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\alpha-2\pi)d\alpha}{\sqrt{2}-\cos(\alpha-\pi)} = \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\pi-2\alpha)d\alpha}{\sqrt{2}-\cos(\pi-\alpha)} = \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\alpha d\alpha}{\sqrt{2}+\cos\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{e^{i(2\alpha)}+e^{-i(2\alpha)}}{2} : z=e^{i\theta} \Rightarrow z^2=e^{i2\theta} \to \cos 2\alpha = \frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\alpha d\alpha}{\sqrt{2}+\cos\alpha} = \oint_{C:|z|=1}\frac{\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2}}{\sqrt{2}+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}dz = \oint_C \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\sqrt{2}+\frac{z^2+1}{2z}}dz = \oint_C \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\frac{2\sqrt{2}z+z^2+1}{2z}}dz$$

$$= \oint_C \frac{(z^4+1)(2z)}{(2z^2)(2\sqrt{2}z+z^2+1)}dz = \oint_C \frac{(z^4+1)dz}{z(z^2+2\sqrt{2}z+1)}$$

اکنون ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم

$$z(z^2+2\sqrt{2}z+1)=0$$

$$z^2+2\sqrt{2}z+1=0 \to \Delta=8-4(1)(1)=4 \to z=\frac{-2\sqrt{2}\pm 2}{2}=-\sqrt{2}\pm 1$$

$$z=0 : z=-1.4+1=-0.4 \quad , \quad z=-1.4-1=-2.4$$

حالا باید مقدار مانده را به ازای $z=0$ و $z=-0.4$ حساب کنیم.

$$f(z)=\frac{z^4+1}{(z)(z+\sqrt{2}-1)(z+\sqrt{2}+1)}$$

قطب مرتبه اول: $b_1\big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^4+1}{(z+\sqrt{2}-1)(z+\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1$

قطب مرتبه اول: $b_1\big|_{z=-1.4+1} = \lim_{z\to -\sqrt{2}+1}\frac{z^4+1}{(z)(z+\sqrt{2}+1)} = \frac{(-\sqrt{2}+1)^4+1}{(-\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+1)} = -1.282$

$$\to I=\oint f(z)dz=(2\pi i)(1-1.282)=-0.564\pi i$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = \frac{1}{2}\oint_C f(z)dz = (\pi i)(1-1.282) = -0.282\pi i$$

Scanned by CamScanner

۳۳) دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۳۴) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx = \text{Im}\left[\begin{array}{l} 2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین بالای محور } x) \\ +\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین روی محور } x)\end{array}\right]$$

که a ضریب x در کمان $\sin$ است.

ابتدا تابع $f(z)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(z)=\frac{z^3}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

اکنون ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$(z^2+a^2)(z^2+b^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} z^2+a^2=0 \to z=\pm ai \\ z^2+b^2=0 \to z=\pm bi \end{cases}$$

برای حل این انتگرال‌ها که حدود انتگرال از $-\infty$ تا ∞ است از انتگرال توابع مختلط کمک می‌گیریم و مسیر انتگرال‌گیری را به شکل روبرو در نظر می‌گیریم. پس $z=-ai$ و $z=-bi$ در این ناحیه جایگاهی ندارند. در نتیجه از میان ۴ ریشه به‌دست آمده، فقط $z=ai$ و $z=bi$ را قبول می‌کنیم. حال باید توابع $f(z)=e^{imz}$ را ایجاد کنیم و مانده را به ازای $z=ai$ و $z=bi$ حساب کنیم:

$$f(z)e^{imz}=\frac{z^3e^{imz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}=\frac{z^3e^{imz}}{(z+ai)(z-ai)(z+bi)(z-bi)}$$

۱) مقدار مانده به ازای $z=ai$ (واضح است که قطب مرتبه اول است.)

$$\text{Res}\{z=ai\}=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)e^{imz}=\lim_{z\to ai}\frac{z^3e^{imz}}{(z+ai)(z+bi)(z-bi)}=\frac{(-a^3i)e^{-ma}}{(2ai)(b^2-a^2)}=\frac{-a^2e^{-ma}}{2(b^2-a^2)}$$

۲) مقدار مانده به ازای $z=bi$ (قطب مرتبه اول است):

$$\text{Res}\{z=bi\}=\lim_{z\to bi}(z-bi)f(z)e^{imz}=\lim_{z\to bi}\frac{z^3e^{imz}}{(z^2+a^2)(z+bi)}=\frac{(-b^3i)e^{-mb}}{(2bi)(a^2-b^2)}=\frac{b^2e^{-mb}}{2(b^2-a^2)}$$

هم‌اکنون باید مقادیر به‌دست آمده در قسمت‌های (۱) و (۲) را در فرمول اولیه قرار دهیم:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\text{Im}(2\pi i(-\frac{a^2e^{-ma}}{2(b^2-a^2)}+\frac{b^2e^{-mb}}{2(b^2-a^2)}))$$

$$=\text{Im}((2\pi i)(\frac{1}{2})(\frac{1}{b^2-a^2})(-a^2e^{-ma}+b^2e^{-mb}))=\frac{\pi}{b^2-a^2}(-a^2e^{-ma}+b^2e^{-mb})$$

$$=\frac{\pi}{a^2-b^2}(a^2e^{-ma}-b^2e^{-mb})$$

Scanned by CamScanner

۳۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۷-۱۳۸۶

یادآوری: فرمول سری لوران حول z_0ای که $f(z)$ در آن غیر تحلیلی است برابر است با

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

نکته مهم: سری لوران تابع $f(z)$ حول z_0ای که در آن تحلیلی است تبدیل به سری تیلور حول همان z_0 می‌شود.

$$f(z)=\frac{2\cos z}{z^5}+\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^5}$$

سری لوران $\frac{2\cos z}{z^5}$ حول $z=0$:

$$\frac{2\cos z}{z^5}=2(\cos z)(\frac{1}{z^5})$$

سری لوران $\frac{1}{z^5}$ حول $z=0$ برابر خودش می‌شود. چون در فرم و قالب سری لوران است. سری لوران $\cos z$ حول $z=0$ تبدیل به سری تیلور $\cos z$ حول $z=0$ می‌شود. چون برای $\cos z$، $z=0$ یک نقطه تحلیلی است:

$$\text{سری تیلور } \cos z \text{ حول } z=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

در نتیجه

$$\text{سری لوران } \frac{2\cos z}{z^5} \text{ حول } z=0 \Rightarrow \frac{2}{z^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n)!}$$

سری لوران $\frac{1}{z^3}$ حول $z=0$ برابر خودش می‌شود. چون در فرم و قالب سری لوران است: $\frac{1}{z^3}=\frac{1}{(z-0)^3}$

سری لوران $\frac{3}{z^5}$ حول $z=0$ هم برابر خودش می‌شود. چون در فرم و قالب سری لوران است. در نتیجه

$$\text{سری لوران کل تابع } f(z) \text{ حول } z=0=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n)!}+\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^5}$$

$I=\oint_C f(z)dz=(2\pi i)$ (مجموع مانده‌های تابع $f(z)$ به ازای نقاط غیر تحلیلی‌اش)

برای پیدا کردن مانده از روی سری لوران باید مقدار b_1 یعنی ضریب $\frac{1}{(z-z_0)}$ را به‌دست آوریم.

مانده به ازای قسمت $\frac{2\cos z}{z^5}$:

$$2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n)!}\rightarrow\begin{cases}2n-5=-1\rightarrow 2n=4\rightarrow n=2\\ \text{به ازای } n=2 \text{ عبارت } \frac{k}{(z-0)} \text{ به وجود می‌آید}\end{cases}$$

$$\forall n=2\Rightarrow(2)\frac{(-1)^2 z^{-1}}{4!}=(\frac{2}{4!})(\frac{1}{z})=(\frac{1}{12})(\frac{1}{z})\rightarrow b_1=\frac{1}{12}$$

مانده به ازای قسمت‌های $\frac{۱}{z^۳}$ و $\frac{۳}{z^۵}$: این دو قسمت اصلاً عامل $\frac{۱}{z}$ ندارند. پس $b_۱$ به ازای این دو قسمت صفر می‌شود

$$\Rightarrow I=\oint_C f(z)dz=(۲\pi i)(\frac{۱}{۱۲}+۰+۰)=\frac{\pi i}{۶}$$

۳۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سـایت گـروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۳۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

اگر $f(z)$ یک تابع تحلیلی در $z=z_۰$ باشد و ما بخواهیم بسط لـوران $f(z)$ را حـول $z=z_۰$ بنویـسیم، در این صورت سری لوران $f(z)$ حول $z=z_۰$ تبدیل به سری تیلور حول آن نقطه می‌شود.

$$f(z)=\frac{۱}{z^۲-z^۳}=\frac{۱}{z^۲(۱-z)}=\frac{-۱}{z^۲(z-۱)}=(\frac{-۱}{z^۲})(\frac{۱}{z-۱})$$

سری لوران $h(z)=\frac{۱}{z-۱}$ حول نقطه $z=۱$ خود تابع می‌شود. چون $h(z)$ خودش در فرم سری لوران حول $z=۱$ هست. سری لوران $g(z)=\frac{۱}{z^۲}$ حول نقطه $z=۱$ تبدیل به سری تیلور $g(z)$ حول $z=۱$ می‌شود.

$$\text{سری تیلور}\rightarrow\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_۰)}{n!}(z-z_۰)^n$$

$$g(z)=\frac{۱}{z^۲}=z^{-۲}\rightarrow g'(z)=-۲z^{-۳}\rightarrow g''(z)=۶z^{-۴}\rightarrow g'''(z)=-۲۴z^{-۵}\ ...$$

$$\text{سری تیلور } g(z):\begin{cases} g(z)=۱+\frac{(-۲)}{۱!}(z-۱)+\frac{۶(z-۱)^۲}{۲!}+\frac{(-۲۴)(z-۱)^۳}{۳!} \\ \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(n+۱)!(-۱)^n(z-۱)^n}{n!}\end{cases}$$

$$\text{سری تیلور } f(z) \text{ حول } z=۱:\ f(z)=(\frac{-۱}{z-۱})(\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(n+۱)!(-۱)^n(z-۱)^n}{n!})$$

$$\rightarrow f(z)=(\frac{-۱}{z-۱})(۱+\frac{(-۲)}{۱!}(z-۱)+\frac{۶(z-۱)^۲}{۲!}+\frac{(-۲۴)(z-۱)^۳}{۳!}+...)$$

۳۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

الف)

$$I_۱=\oint_{|z|=۱}\frac{\tanh^۲(z+\frac{۱}{۲})dz}{e^z\sin z}=\oint_{|z|=۱}\frac{\sinh^۲(z+\frac{۱}{۲})}{\cosh^۲(z+\frac{۱}{۲})e^z\sin z}dz$$

ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

تابع cosh یک تابع غیر صفر و همواره تحلیلی است.

(۱) $\cosh^{2}(z+\frac{1}{2})\neq 0$

تابع e^{z} هم یک تابع غیر صفر و همواره بزرگ‌تر از صفر است.

(۲) $e^{z}\neq 0\ ;\ e^{z}>0$

(۳) $\sin z=0\Rightarrow z=k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

اکنون مسیر $C:|z|=1$ را مشخص می‌کنیم تا وضعیت بود و نبود ریشه‌های مخرج را در آن بررسی کنیم.
تنها ریشه مخرج مجموعه، $z=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$ است که از این میان تنها $z=0$ داخل این دایره است.
پس مانده را به ازای $z=0$ حساب می‌کنیم. ابتدا مرتبه $z=0$ را پیدا می‌کنیم:

اگر $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{m}f(z)\neq 0$، آنگاه $z=z_0$ قطب مرتبه m است. در نتیجه

$$z=0\ ;\ \lim_{z\to 0}\frac{z^{m}\tanh^{2}(z+\frac{1}{2})}{e^{z}\sin z}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{\to}\lim_{z\to 0}\frac{mz^{m-1}\tanh^{2}(z+\frac{1}{2})+2\tanh(z+\frac{1}{2})\dfrac{1}{\cosh^{2}(z+\frac{1}{2})}z^{m}}{e^{z}\sin z+\cos z\,e^{z}}$$

برای این‌که حاصل حد موجود و مخالف صفر باشد باید که تأثیر z^{m-1} خنثی شود. با این حساب اگر که $m=1$ باشد، بی‌اثر می‌شود و جواب حد موجود و مخالف صفر است.

بررسی جواب:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z\tanh^{2}(z+\frac{1}{2})}{e^{z}\sin z}\overset{H}{=}\lim_{z\to 0}\frac{\tanh^{2}(z+\frac{1}{2})+2\tanh(z+\frac{1}{2})\dfrac{1}{\cosh^{2}(z+\frac{1}{2})}z}{e^{z}\sin z+\cos z\,e^{z}}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\tanh^{2}(z+\frac{1}{2})}{\cos z\,e^{z}}=\frac{\tanh^{2}(\frac{1}{2})}{\cos(0)e^{0}}=\tanh^{2}(\frac{1}{2})$$ موجود و مخالف صفر است

$$b_1=\lim_{z\to 0}zf(z)=\tanh^{2}(\frac{1}{2})$$

$z=0$ قطب مرتبه اول است. در نتیجه

$$\Rightarrow I=\oint_{C}f(z)dz=2\pi i\tanh^{2}(\frac{1}{2})$$

ب) با تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ داریم:

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{-(z+i)^{2}}{z(z^{2}+6z+1)}dz=2\pi i\sum_{i=1}^{2}\operatorname{Res}f(z)|_{z=z_i}$$

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} z f(z) = 1$$

مانده متناظر با دو قطب $z=0$ و $z=-3+\sqrt{8}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=-3+\sqrt{8}} = \lim_{z\to -3+\sqrt{8}} \left((z-(-3+\sqrt{8}))f(z)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}\,d\theta = \frac{4\pi(3-\sqrt{8})}{16-6\sqrt{8}}$$

ج)

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x\,dx}{x^2+x+1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 2\pi i\ \text{(مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین بالای محور xها)} \\ +\pi i\ \text{(مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین روی محور xها)} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1} \to f(z) = \frac{1}{z^2+z+1} \quad ; \quad f(z)e^{2iz} = \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}$$

ریشه‌های مخرج:

$$z^2+z+1=0 \Rightarrow \Delta = 1-4(1) = -3$$

$$z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C} \\ z = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{C} \end{cases} \quad ; \quad \mathbb{C} : \operatorname{Im}\{z\} > 0$$

مانده را به ازای $z = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ که بالای محور xها است پیدا می‌کنیم:

$$f(z)e^{2iz} = \frac{e^{2iz}}{z^2+z+1} = \frac{e^{2iz}}{(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$b_1 = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} (z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) f(z)e^{2iz} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{e^{2iz}}{(z+\frac{1}{2}+z\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \frac{e^{2i(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{e^{-i}e^{-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow I_3 = \operatorname{Im}\left[\frac{2\pi i e^{-i}e^{-\sqrt{3}}}{i\sqrt{3}}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} e^{-i}\right] = \frac{2\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \operatorname{Im}[e^{-i}]$$

$$\xrightarrow{e^{-i}=\cos 1 - i\sin 1} I_3 = \frac{2\pi e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}(-\sin 1)$$

د)

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2-2x+2)^2} \ , \ f(x) = \frac{x}{(x^2-2x+2)^2} \to f(z) = \frac{z}{(z-2z+2)^2}$$

ریشه‌های مخرج $z^2-2z+2=0 \to z=\dfrac{2\pm 2i}{2}=1\pm i \to \begin{cases} z=1+i\in\mathbb{C} \\ z=1-i\notin\mathbb{C}\end{cases}$

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-2z+2)^2}=\frac{z}{\left((z-1+i)(z-1-i)\right)^2}=\frac{z}{(z-1+i)^2(z-1-i)^2}$$

$z=1+i$ قطب مرتبه دوم است:

$$\xrightarrow{\text{به ازای قطب مرتبه m ام}} b_1=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}(z-z_0)^m f(z)}{(dz)^{m-1}}\right)$$

$$\xrightarrow{m=2} b_1=\lim_{z\to(1+i)}\frac{d}{dz}(z-1-i)^2 f(z)=\lim_{z\to(1+i)}\left(\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-1+i)^2}\right)$$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1+i)^2}\to f'(z)=\frac{(z-1+i)^2-2(z-1+i)z}{(z-1+i)^4}$$

$$\to f'(1+i)=\frac{(2i)^2-2(2i)(1+i)}{(2i)^4}=\frac{-4-4i(1+i)}{16}=\frac{-4-4i+4}{16}=\frac{-i}{4}\to b_1=-\frac{i}{4}$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}dx=2\pi i\ \text{(مجموع مانده به ازای نقاط غیرتحلیلی بالای محور xها)}$$

$$\Rightarrow I_4=(2\pi i)\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

۲۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

$$f(z)=e^z(z-1)^{-2}=\frac{e^z}{(z-1)^2}=e^z\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)$$

۱) سری لوران e^z حول $z=i$ می‌شود سری تیلورش حول $z=i$. چون $z=i$ برای e^z یک نقطه تحلیلی است.

e^z سری مک لوران $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$z=i$ حول e^z سری لوران : $e^z=e^{(z-i+i)}=e^{i+(z-i)}=e^i.e^{(z-i)}$

$z=i$ سری تیلور حول $=e^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$

۲) سری لوران $\frac{1}{(z-1)^2}$ حول $z=i$ نیز می‌شود سری تیلورش حول $z=i$.

$z=i$ سری تیلور حول $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-i)^n\ ;\ a_n=\frac{f^{(n)}(i)}{n!}\to a_n=\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)!}{(i-1)^{n+2}}=\frac{(-1)^n(n+1)}{(i-1)^{n+2}}$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\to f(i)=\frac{1}{(i-1)^2}$$

Scanned by CamScanner

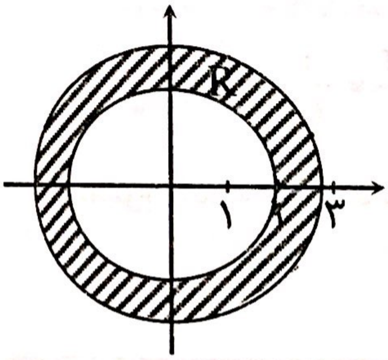
$$f'(z)=\frac{-2(z-1)}{(z-1)^4}=-\frac{2}{(z-1)^3}\to f'(i)=\frac{-2}{(i-1)^3}$$

$$f''(z)=(-2)\left(\frac{-3(z-1)^2}{(z-1)^6}\right)=\frac{6}{(z-1)^4}\to f''(i)=\frac{6}{(i-1)^4}$$

$$\to f^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n(n+1)!}{(z-1)^{n+2}}\to f^{(n)}(i)=\frac{(-1)^n(n+1)!}{(i-1)^{n+2}}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(i-1)^{n+2}}(z-i)^n$$

$$\xrightarrow{(2),(1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(i-1)^{n+2}}(z-i)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^i(z-i)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n\left(\frac{(-1)^n(n+1)e^i}{(i-1)^{n+2}n!}\right)$$

۴۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵



$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}\quad;\quad C\in\{2\le|z|\le 3\}$$

ابتدا ناحیه را مشخص می‌کنیم؛ یک قرص دایره‌ای به شعاع بیشتر از $R=2$ و شعاع کمتر از $R=3$ و به مرکز مبدأ.

سری لوران را حول zهایی می‌نویسیم که $f(z)$ در آن‌ها غیر تحلیلی است. پس ابتدا نقاط غیرتحلیلی تابع $f(z)$ را پیدا می‌کنیم.

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}\quad;\quad(z-1)(z-3)=0\Rightarrow\begin{cases}z-1=0\to z=1\\ z-3=0\to z=3\end{cases}$$

اما $z=1$ عضو ناحیه $2<|z|\le 3$ نیست. پس سری لوران $f(z)$ را تنها حول $z=3$ می‌نویسیم.

$$f(z)=\frac{1}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{(z-3)}\frac{1}{(z-1)}$$

۱) سری لوران $\frac{1}{(z-3)}$ خودش می‌شود چون در فرم و قالب سری لوران است.

۲) سری لوران $\frac{1}{(z-1)}$ حول $z=3$ می‌شود سری تیلورش حول $z=3$. چون $\frac{1}{(z-1)}$ در $z=3$ تحلیلی است.

سری تیلور حول $z=3$: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-3)^n\quad;\quad a_n=\frac{f^{(n)}(3)}{n!}$

$$f^{(n)}(3)=\frac{(-1)^n n!}{(2)^{n+1}}\quad;\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2)^{n+1}n!}(z-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{2^{n+1}}$$

$\xrightarrow{(1),(2)}$ سری لوران کل $f(z)$ حول $z=3$: $\frac{1}{(z-3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$

Scanned by CamScanner

۴۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$f(z)=\frac{-۲z+۳}{(z-۱)(z-۲)}\quad,\quad z_۰=۰\quad,\quad ۱<|z|<۳$$

$f(z)$ در $z=۰$ تحلیلی است. پس سری لوران، سری تیلورش حول $z=۰$ می‌شود.

$$f(z)=(-۲z+۳)(\frac{۱}{(z-۱)})(\frac{۱}{(z-۲)})$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{۱}{(z-۱)}\ ;\ z_۰=۰:\ \sum\limits_{n=۰}^{\infty}z^n\\[2ex] \dfrac{۱}{(z-۲)}=\dfrac{۱}{۲(\frac{z}{۲}-۱)}=\dfrac{۱}{۲}\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(\frac{z}{۲})^n\end{array}\right\}\to(-۲z+۳)\sum_{n=۰}^{\infty}z^n\frac{۱}{۲}(\frac{z}{۲})^n=(-۲z+۳)\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{۲n}}{۲^{n+۱}}$$

$$\Rightarrow -۲z\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{۲n}}{۲^{n+۱}}+۳\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{۲n}}{۲^{n+۱}}=-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{۲n+۱}}{۲^n}+۳\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^{۲n}}{۲^{n+۱}}=f(z)$$

۴۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

الف)

$$I_۱=\oint_{|z|=۱}e^{\frac{۱}{z}}\sin(\frac{۱}{z})dz$$

تنها نقطه غیرتحلیلی این تابع، نقطه $z=۰$ است. باید مانده این تابع را به ازای $z=۰$ پیدا کنیم.

۱) سری لوران $e^{\frac{۱}{z}}$ حول $z=۰$:

$$e^z\ (\text{حول صفر})=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Rightarrow e^{\frac{۱}{z}}\ (\text{حول صفر})=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{z^n n!}$$

۲) سری لوران $\sin(\frac{۱}{z})$ حول $z=۰$: می‌دانیم که سری لوران $\frac{۱}{z}$ حول $z=۰$ برابر خودش می‌شود. درنتیجه

$$z=۰\ \text{حول}\ \sin z\ \text{سری لوران}=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{z^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

$$z=۰\ \text{حول}\ \sin\frac{۱}{z}\ \text{سری لوران}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{z^{۲n+۱}(۲n+۱)!}$$

و در نهایت داریم:

$$z=۰\ \text{حول}\ e^{\frac{۱}{z}}\sin(\frac{۱}{z})\ \text{سری لوران}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{z^n n!}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{z^{۲n+۱}(۲n+۱)!}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{z^{۳n+۱}n!(۲n+۱)!}$$

$$۳n+۱=۱\Rightarrow n=۰$$

سری لوران به ازای $n=۰$، عبارت $\frac{b_۱}{(z-۰)}$ را خواهد داد:

$$n=0 \Rightarrow \frac{(-1)^0}{z(0!)(1)!}=\frac{1}{z} \to b_1=1 \Rightarrow I_1=\oint_{C:|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin(\frac{1}{z})dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i$$

$$I_2=\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta+\sin\theta+4}$$

ب)

اکنون که بازه انتگرال‌گیری از صفر تا 2π است، ما می‌توانیم از تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ استفاده کنیم و از $f(z)$ به دست آمده بر روی مسیر $C:|z|=1$ انتگرال‌گیری کنیم.

$$z=e^{i\theta} \Rightarrow dz = izd\theta \Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz} \quad , \quad \cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \quad , \quad \sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\Rightarrow I_2=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta+4}=\oint_{C:|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{4+(\frac{z+\frac{1}{z}}{2})+(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i})}$$

$$=\oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{4+(\frac{z^2+1}{2z})+(\frac{z^2-1}{2iz})}=\oint_C\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{8iz+iz^2+i+z^2-1}{2iz}}=\oint_C\frac{2dz}{z^2(1+i)+z(8i)+i-1}$$

ریشه‌های مخرج:

$$\Delta=(8i)^2-4(1+i)(i-1)=-64-4(-1-1)=-64+8=-56$$

$$\to \sqrt{-56}=\pm i2\sqrt{14} \Rightarrow z=\frac{-8i\pm i2\sqrt{14}}{2(1+i)} \Rightarrow z_1=\frac{-8i+2i\sqrt{14}}{2(1+i)} \quad , \quad z_2=\frac{-8i-2i\sqrt{14}}{2(1+i)}$$

$$z_1=\frac{i(-8+2\sqrt{14})}{2(1+i)}=(\frac{-8+2\sqrt{14}}{2})(\frac{i+1}{2})\xrightarrow{\sqrt{14}\cong 3/7}=-0/15(i+1)=(-0/15i-0/15)\in \mathbb{C}$$

$$z_2=(\frac{i}{1+i})(\frac{-8-2\sqrt{14}}{2})=(\frac{-8-2\sqrt{14}}{2})(\frac{i+1}{2})=-3/85(i+1)=(-3/85i-3/85)\notin \mathbb{C}$$

مانده را به ازای z_1 حساب می‌کنیم. z_1 قطب مرتبه اول است:

$$f(z)=\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$b_1=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to z_1}\frac{2}{(z-z_2)}=\frac{2}{-0/15i-0/15+3/85i+3/85}=\frac{2}{3/7i+3/7}$$

$$\Rightarrow I_2=\oint_{C:|z|=1} f(z)dz=(2\pi i)(\frac{2}{3/7i+3/7})=\frac{4\pi i}{3/7i+3/7}$$

ج)

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos 2x}{(x^2+4)^2}dx$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dz=\operatorname{Re}\left[\begin{array}{l}2\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین بالای محور xها})\\ +\pi i\ (\text{مجموع مانده‌های تابع } f(z)e^{iaz} \text{ به ازای نقاط تکین روی محور xها})\end{array}\right]$$

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\rightarrow f(z)=\frac{z^2}{(z^2+4)^2}\rightarrow f(z)e^{2iz}=\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+4)^2}$$

ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$z^2+4=0\rightarrow z^2=-4\rightarrow z=\pm 2i$$

پس باید مانده را به ازای $z=2i$ حساب کنیم. $z=2i$ قطب مرتبه دوم است:

$$f(z)e^{2iz}=\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2+4)^2}=\frac{z^2e^{2iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

$$b_1=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{d}{dz}(z-2i)^2\frac{z^2e^{2iz}}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\right)=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{d}{dz}\frac{z^2e^{2iz}}{(z+2i)^2}\right)$$

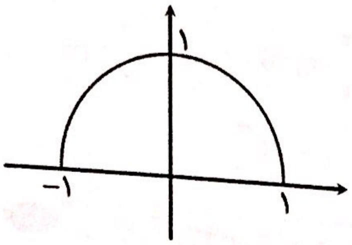
$$g(z)=\frac{z^2e^{2iz}}{(z+2i)^2}\rightarrow g'(z)=\frac{(2ze^{2iz}+2ie^{2iz}z^2)(z+2i)^2-2(z+2i)z^2e^{2iz}}{(z+2i)^4}$$

$$\rightarrow g'(2i)=\frac{(2\times 2i\times e^{-4}+2ie^{-4}(-4))(-16)-2(4i)(-4)e^{-4}}{64}$$

$$=\frac{(4ie^{-4}-8ie^{-4})(-16)+32ie^{-4}}{64}=\frac{16(-4ie^{-4}+8ie^{-4}+2ie^{-4})}{64}=\frac{3}{2}ie^{-4}$$

$$\rightarrow b_1=\frac{3}{2}ie^{-4}\rightarrow I=\operatorname{Re}(2\pi i(\frac{3}{2}ie^{-4}))=\operatorname{Re}(-3\pi e^{-4})=-3\pi e^{-4}$$

د) $I_4=\int_C((\bar z)^2+|z|)dz \quad , \quad C: x^2+y^2=1 \ , \ y>0$



ابتدا مسیر C را مشخص می‌کنیم. C یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ و به شعاع یک است. البته نیم دایره بالای محور xها.

$$\Rightarrow I_4=\oint_C(\bar z)dz+\oint_C|z|\,dz$$

$$I_{4,1}=\oint_C(\bar z)dz\Rightarrow \bar z=re^{-i\theta}\quad,\quad(\bar z)^2=r^2e^{-2i\theta}$$

بر روی این مسیر شعاع تغییری نمی‌کند و همواره مقدار ثابت خود را حفظ می‌کند ولی θ در محدوده $(0,\pi)$ تغییر می‌کند. پس داریم که

$$z=re^{i\theta}\rightarrow dz=e^{i\theta}dr+ire^{i\theta}d\theta\rightarrow dz=ire^{i\theta}d\theta$$

$$\rightarrow\int_0^{\pi}r^2e^{-2i\theta}ire^{i\theta}d\theta=ir^3\int_0^{\pi}e^{-i\theta}d\theta=(ir^3)(\frac{-1}{i}e^{-i\theta}\Big|_0^{\pi})$$

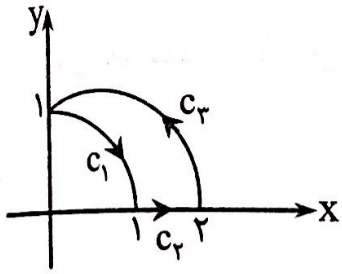
$$\Rightarrow -r^3e^{-i\theta}\Big|_0^{\pi}=-r^3(e^{-i\pi}-1)=-r^3(-2)=2r^3\xrightarrow{r=1}=2$$

$$I_{4,2}=\oint_C |z|\,dz=\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}=r\xrightarrow{r=1}|z|=1\\ dz=ire^{i\theta}d\theta\xrightarrow{r=1}dz=ie^{i\theta}d\theta\end{cases}$$

$$I_{4,2}=\int_0^{\pi}ie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{\pi}e^{i\theta}d\theta=(i)\left(\frac{1}{i}e^{i\theta}\Big|_0^{\pi}\right)=e^{i\pi}-1=-2$$

$$\Rightarrow I_4=I_{4,1}+I_{4,2}=+2-2=0$$

۴۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵



$$\oint_C \bar{z}dz\Rightarrow\oint_{C_1}\bar{z}dz+\oint_{C_2}\bar{z}dz+\oint_{C_3}\bar{z}dz$$

$$C_1:\ z=e^{i\theta}\ ,\ \frac{\pi}{2}<\theta<0\Rightarrow\bar{z}=e^{-i\theta}\ ,\ dz=ie^{i\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow\oint_{C_1}\bar{z}dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-i\theta}.ie^{i\theta}d\theta=-i\frac{\pi}{2}$$

$$C_2:z=x\ ,\ 1<x<2\Rightarrow\bar{z}=x\ ,\ dz=dx\Rightarrow\oint_{C_2}\bar{z}dz=\int_1^2 xdx=\frac{3}{2}$$

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ را به‌صورت پارامتری می‌نویسیم و سپس انتگرال را روی این مسیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}\cos^2\theta=\frac{x^2}{4}\ ,\ 0<x<2\Rightarrow x=2\cos\theta\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\\ \sin^2\theta=y^2\ ,\ 0<y<1\Rightarrow y=\sin\theta\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_3:\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ ,\ z=x+iy\Rightarrow\bar{z}=x-iy=2\cos\theta-i\sin\theta$$

$$dz=dx+idy=(-2\sin\theta+i\cos\theta)$$

$$\Rightarrow\int_{C_3}\bar{z}dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta-i\sin\theta)(-2\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{3}{2}\sin2\theta+2i)d\theta=-\frac{3}{2}+i\pi$$

$$\Rightarrow\oint_z\bar{z}dz=\int_{C_1}\bar{z}dz+\int_{C_2}\bar{z}dz+\int_{C_3}\bar{z}dz=-i\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+i\pi=3+i\frac{\pi}{2}$$

۴۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۴۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

$$\oint\frac{e^{az}}{z}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\left\{\frac{e^{az}}{z}\right\}=2\pi ie^{0}=2\pi i\qquad(I)$$

حال تغییر متغیر $z=e^{i\theta}$ را اعمال می‌کنیم:

$$I=\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1} e^{\frac{a}{2}(z+z^{-1})}\cos(\frac{a}{2i}(z-z^{-1}))\frac{dz}{iz}$$

$$\cos(\frac{a}{2i}(z-z^{-1}))=\cosh(\frac{a}{2}(z-z^{-1}))=\frac{1}{z}(e^{\frac{a}{2}(z-z^{-1})}+e^{-\frac{a}{2}(z-z^{-1})})$$

$$(II):\frac{e^{\frac{a}{z}}}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!z^n}=\frac{1}{z}(1+\frac{a}{z}+\frac{a^2}{2!z^2}+\frac{a^3}{3!z^3}+\dots)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^2}+\dots$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}(\int\frac{e^{az}}{iz}dz+\int\frac{e^{\frac{a}{z}}}{iz}dz)\underset{(II)}{\overset{(I)}{=}}\pi+\frac{1}{2i}2\pi i(1)=2\pi$$

۴۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

الف)
$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(5+4\cos\theta)^2}\xrightarrow{z=e^{i\theta}}\oint_c\frac{dz}{iz(5+2z+2z^{-1})^2}$$

با توجه به این‌که $r=1$ می‌باشد، پس c نقاط داخلی دایره واحد است.

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{4(z+2)^2(z+\frac{1}{2})}=\frac{2\pi i}{i}\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}}f(z)=2\pi\times\frac{z}{4(z+2)^2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{9}$$

ب)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}$$

با توجه به این‌که درجه مخرج کوچکتر از درجه صورت به‌علاوه ۲ می‌باشد و این‌که مخرج فاقد صفر حقیقی است، این انتگرال برابر است با:

$$I=\int_{Im z>0}\frac{dz}{(z^2-2z+5)^2}$$

$$z^2-2z+5=0\Rightarrow z=1\pm2i\xrightarrow{Im z>0}z=1+2i$$

$$I=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1+2i}f(z)=2\pi i\times\lim_{z\to1+2i}\frac{d}{dz}(z-1-2i)\times\frac{1}{(z^2-2z+5)^2}=2\pi i\times\frac{-2}{(4i)^3}=\frac{\pi}{16}$$

۴۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

$$f(z)=\frac{1-e^{-\frac{1}{z}}}{z+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}(1-e^{-\frac{1}{z}})=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n)(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!z^n})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}\pm\dots)(\frac{1}{z}-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{4!z^4}\pm\dots)$$

Scanned by CamScanner

$$\text{ضریب } \frac{۱}{z} = \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{۱}{۲\times ۲!} + \frac{۱}{۴\times ۳!} + \dots\right) = \frac{۱}{۲}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^n \times (n+۱)!} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(\frac{۱}{۲})^n}{n!} = e^{\frac{۱}{۲}} - ۱$$

$$\underset{z=۰}{\text{Res}}\, f(z) = \frac{۱}{z} \;,\; \underset{z=-۲}{\text{Res}}\, f(z) = \lim_{z \to -۲} (z+۲) f(z) = \lim_{z \to -۲} \left(۱ - e^{-\frac{۱}{z}}\right) = ۱ - e^{\frac{۱}{۲}}$$

پاسخِ فصل ۶

نگاشت

پرسش ۳۷

۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۴-۱۳۹۳

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

$$\omega=\frac{z-1+i}{z+1+i}=1-\frac{2}{z+1+i}$$

با نگاشت انتقال $\omega_1=z+1+i$ تصویر ناحیه D عبارتند از:

$$u+iv=x+iy+1+i=(x+1)+i(y+1)\begin{cases} u=x+1\xrightarrow{x>\frac{-1}{2}}u>\frac{1}{2}\\ v=y+1\xrightarrow{y\le 0}v\le 1\end{cases}$$

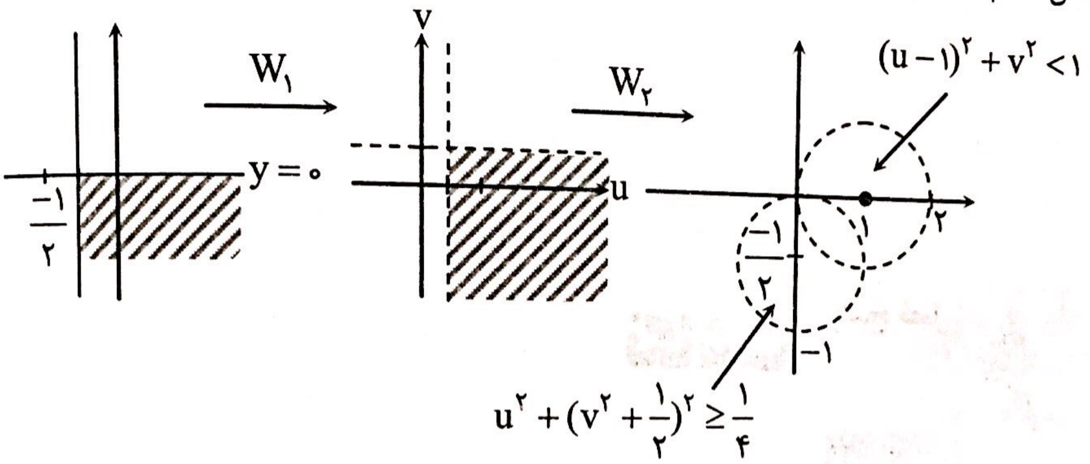
با نگاشت انعکاس $w_2=\frac{1}{w_1}$ تصویر $\{(x,y)\,|\,x>\frac{1}{2},y\le 1\}$ عبارتند از:

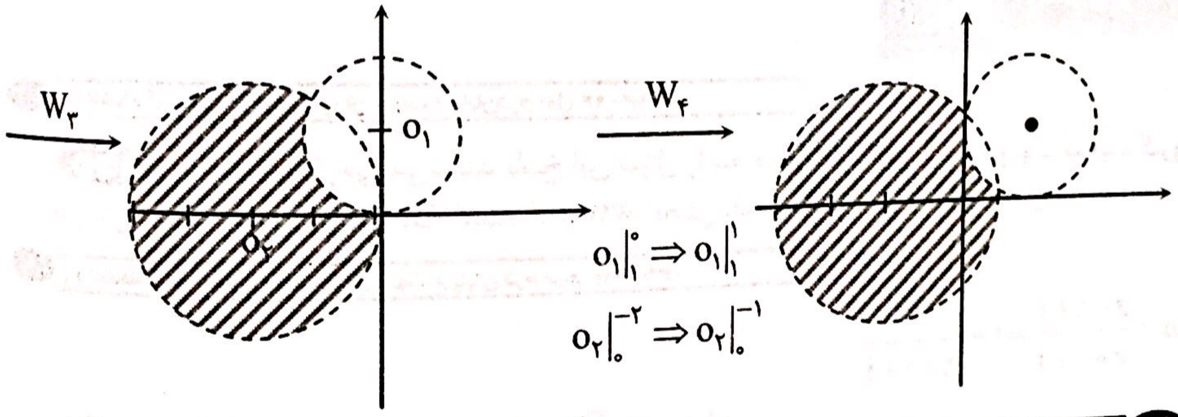
$$u+iv=\frac{1}{x+iy}\rightarrow x+iy=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2}>\frac{1}{2}\rightarrow u^2+v^2-2u<0\\ \quad (u-1)^2+v^2<1\\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}\le 1\rightarrow u^2+v^2\ge -v\\ \quad u^2+(v+\frac{1}{2})^2\ge\frac{1}{4}\end{cases}$$

با نگاشت دوران $w_3=-2w_2$ تصویر $\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2<1\ ,\ x^2(y+\frac{1}{2})^2\geq\frac{1}{4}\}$ عبارتند از:

$$w_3=-2w_2\to a=-2=re^{i\theta}\to r=|-2|=2>1\quad,\quad \theta=\mathrm{Arctan}(\frac{0}{-2})=\pi$$

بنابراین ناحیه مورد نظر ابعادش دو برابر شده و به اندازه π (در جهت مثلثاتی) دوران می‌یابد و با نگاشت انتقال $w_4=w_3+1$ کافی است مرکز دایره‌های قسمت قبل را به اندازه یک واحد روی محور xها منتقل می‌کنیم.

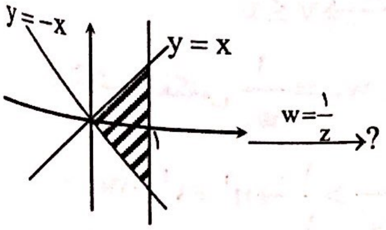




۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۰-۱۳۸۹

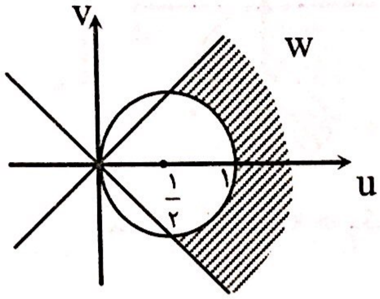
ناحیه ذکر شده به صورت ریاضی به شکل زیر است:



$$z=\{(x,y)\,|\,y\leq x, y\geq -x, x\leq 1\}$$

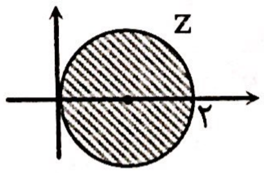
$$x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u}{u^2+v^2}\\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} y \le x \Rightarrow -v \le u \\ y \ge -x \Rightarrow -v \ge -u \end{array}\right\} \Rightarrow -u \le -v \le u \Rightarrow -u \le v \le u \\ x \le ۱ \Rightarrow \dfrac{u}{u^۲+v^۲} \le ۱ \Rightarrow u^۲+v^۲-u \ge ۰ \Rightarrow (u-\dfrac{۱}{۲})^۲+v^۲ \ge \dfrac{۱}{۴} \end{cases}$$



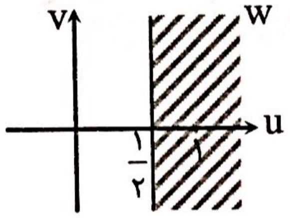
نواحی خارج دایره‌ای به مرکزیت $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ بنـابراین طبـق دو شرط به دست آمده ناحیه مطلوب می‌شود:

۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲



$$(x-۱)^۲+y^۲ \le ۱ \rightarrow |z-۱| \le ۱$$

$$\rightarrow \left|\frac{۱}{w}-۱\right| \le ۱ \Rightarrow |w-۱| \le |w|$$



مکان هندسی نقاطی در صفحه w که فاصلـه آن‌هـا از نقطـه $(۱,۰)$ کمتـر از فاصله آن‌ها از مبدأ است یعنی سمت راست خط $u=\frac{۱}{۲}$

۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شرق / پایان‌ترم اول ۹۳-۱۳۹۲

دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۹۱-۱۳۹۰

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سـایت گـروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۹۲

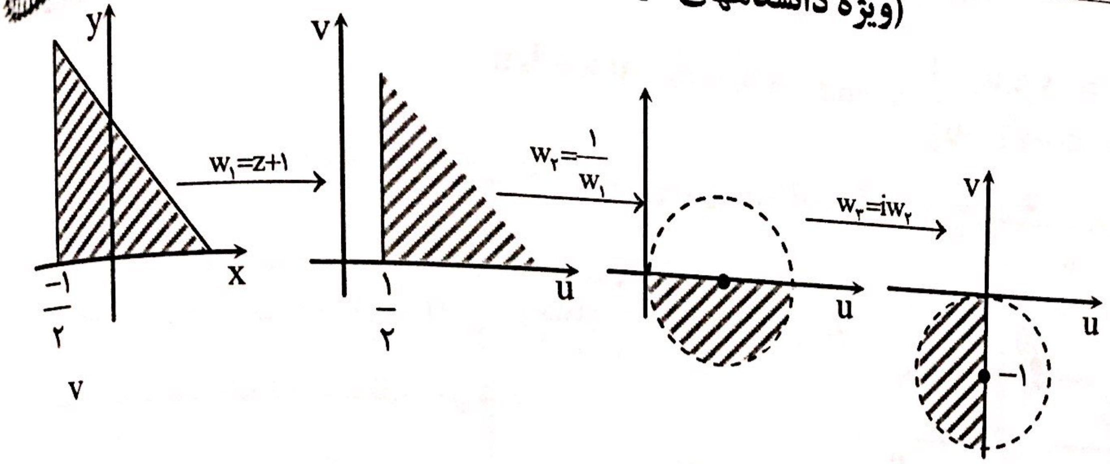
WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را بـه صـورت رایگـان از طریـق وب سـایت گـروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان ترم دوم ۹۲-۱۳۹۱

تصویر ناحیـه R را بـه ترتیـب تحـت چهـار نگاشـت انتقـال $w_۱=z+۱$، انعکـاس $w_۲=\frac{۱}{w_۱}$، دوران $w_۳=-iw_۲$ و انتقال $w_۴=i+w_۳$ انجام می‌دهیم زیرا می‌توان نوشت:

$$w=i\frac{z+۱-۱}{z+۱}=i(۱-\frac{۱}{z+۱})=i-i\frac{۱}{z+۱}$$

Scanned by CamScanner



تحت این نگاشت x ها یک واحد افزایش می‌یابند.

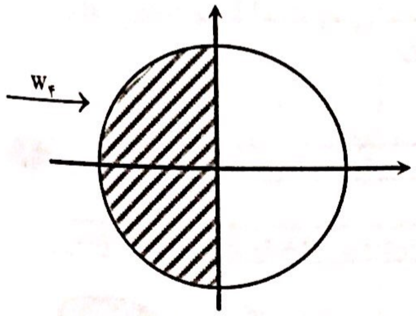
$$w_2=\frac{1}{w_1}\ ,\ \begin{cases} w_2=u+iv \\ w_1=x+iy \end{cases}\Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}$$

$$=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}$$

$$x\geq-\frac{1}{2}\Rightarrow u^2+v^2\leq 2u\Rightarrow (u-1)^2+v^2\leq 1$$

$$y\geq 0$$

$$\frac{-v}{u^2+v^2}\geq 0\Rightarrow v\leq 0$$



$$w_3=-iw_2\Rightarrow a=-i$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r=1 \\ \theta=\tan^{-1}\frac{-1}{0}=\frac{3\pi}{2} \end{cases}\Rightarrow\frac{3\pi}{2}$$ دوران به اندازه

انتقال به اندازه

$$w_4=i+w_3\to i$$

۸ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۹۲-۱۳۹۱

$$\omega=\frac{1}{z+(1-i)}\Rightarrow\omega z+\omega(1-i)=1\Rightarrow\omega z=1-\omega(1-i)\to z=\frac{1}{\omega}-(1-i)$$

$$\omega=u+iv\to\frac{1}{\omega}=\frac{1}{u+iv}\frac{u-iv}{u-iv}.\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

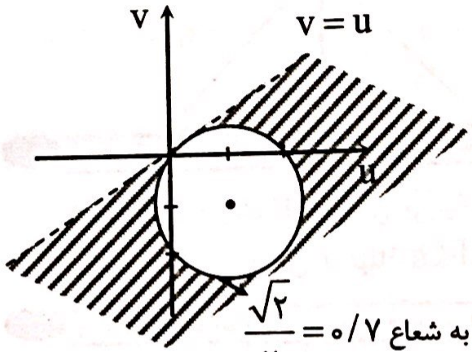
$$\Rightarrow z=\frac{u-iv}{u^2+v^2}-(1-i)\to z=\frac{u}{u^2+v^2}-1+i(\frac{-v}{u^2+v^2}+1)$$

$$z=x+iy\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2}-1\Rightarrow x+1=\frac{u}{u^2+v^2}\to -1\leq x\leq\frac{-1}{2}\Rightarrow 0\leq x+1\leq\frac{1}{2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}+1\Rightarrow y-1=\frac{-v}{u^2+v^2}\to 1\leq y\leq\frac{3}{2}\Rightarrow 0\leq y-1\leq\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0\le \dfrac{u}{u^2+v^2}\le \dfrac{1}{2} \\ 0\le \dfrac{-v}{u^2+v^2}\le\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow 0\le\frac{u-v}{u^2+v^2}\le 1$$

$$\rightarrow\begin{cases}(1)\quad 0\le \dfrac{u-v}{u^2+v^2 \rightarrow \text{مثبت}} \rightarrow u-v\ge 0\rightarrow u\ge v \xleftarrow{\text{ناحیه دو}} \\ (2)\quad \dfrac{u-v}{u^2+v^2}\le 1 \rightarrow u-v\le u^2+v^2 \rightarrow -v-v^2\le u^2-u\end{cases}$$

$$\rightarrow -(v^2+v)\le u^2-u \rightarrow -((v+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})\le (u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$



$$\Rightarrow -(v+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\le (u-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$

نقاط بیرون دایره به مرکز $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ و به شعاع $(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le (u-\frac{1}{2})^2+(v+\frac{1}{2})^2 \longleftarrow \text{ناحیه یک}$$

جواب، اشتراک بین این دو ناحیه یعنی محل تقاطع دایره با نیمساز ربع اول است: $v=0\rightarrow u=0$

۹ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان ترم اول ۹۱-۱۳۹۰

$z=x+iy\ ,\ w=u+iv$

$u+iv=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

$$x=c \xrightarrow{\text{نگاشت}} \text{خط} \begin{cases}u=\sin(c)\cosh y\\ v=\cos(c)\sinh y\end{cases}$$

می‌دانیم $\cosh^2 y-\sin^2 y=1$ پس: $(\frac{u}{\sin(c)})^2-(\frac{v}{\cos(c)})^2=1$

و این معادله یک هذلولی در صفحه w است. که با توجه به اینکه $0<c<\frac{\pi}{2}$ می‌باشد، $\sin(c)$ و $\cos(c)$ هر دو مثبت می‌باشند. پس نگاشت خط $x=c$ را به شاخه سمت راست هذلولی مذکور می‌نگارد.

۱۰ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۹-۱۳۸۸

می‌دانیم که برای $f(z)=\frac{1}{z}$ داریم:

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \xrightarrow{\frac{1}{z}} a+bu-cv+d(u^2+v^2)=0$$

$y=x \rightarrow d=a=0\ ,\ b=1\ ,\ c=-1 \rightarrow u+v=0$

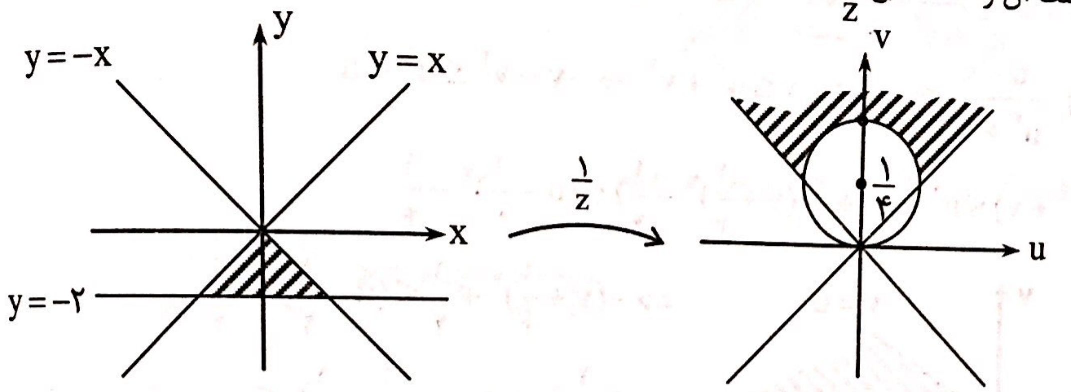
$u=-x \rightarrow d=a=0\ ,\ b=1\ ,\ c=1 \rightarrow u-v=0$

Scanned by CamScanner

$$y=-2 \rightarrow d=2, c=1, a=b=0 \rightarrow -v+2(u^2+v^2)=0 \Rightarrow u^2+v^2-\frac{v}{2}=0 \Rightarrow u^2+(v-\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$$

دایره‌ای به مرکز $(0,\frac{1}{4})$ و به شعاع $r=\frac{1}{4}$. حال یک نقطه مشخص از ناحیه مورد نظر را انتخاب کرده و نگاشت آن را تحت تابع $\omega=\frac{1}{z}$ می‌یابیم:

$$z=-i \Rightarrow \omega=\frac{1}{z}=\frac{1}{-i}=i$$



۱۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۸

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۸-۱۳۸۷

$$w=\frac{iz}{z-1} \quad , \quad z=x+iy$$

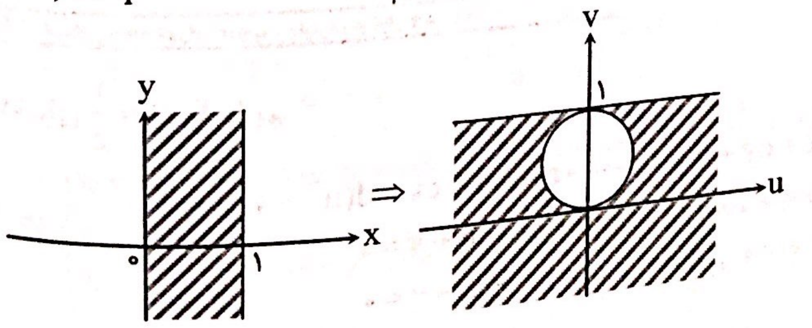
$$\Rightarrow w=\frac{i(x+iy)}{x+iy-1}=\frac{ix-y}{(x-1)+iy}=\frac{(ix-y)[(x-1)-iy]}{(x-1)^2+y^2}=\frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2}i+\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$v=\frac{x^2-x+y^2}{(x-1)^2+y^2} \quad , \quad u=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$$

برای $x=0$، $v=\frac{y^2}{1+y^2}$ و $u=\frac{y}{1+y^2}$ پس $u^2=v-v^2$، $u^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

برای $x=1$، $u=\frac{1}{y}$ و $v=1$. پس $v=1$ تصویر آن است. مرزها مشخص شد. حال برای یافتن ناحیه موردنظر، یک نقطه داخل ناحیه z را جایگذاری می‌کنیم:

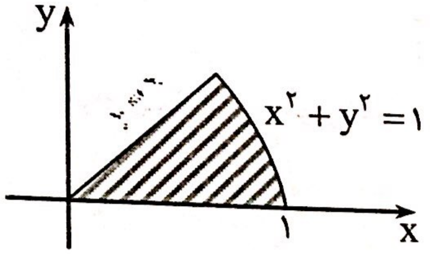
$$z=\frac{1}{2} \xrightarrow{w=\frac{iz}{z-1}} =-i$$



۱۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند / پایان‌ترم دوم ۸۸–۱۳۸۷

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۷



این تبدیل را می‌توان ترکیب دو تبدیل به‌صورت زیر دانست:

$$w_1 = z^8 \quad , \quad w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$$

برای تبدیل اول داریم:

$$w = \rho e^{i\varphi} = (re^{i\theta})^8 \quad \begin{matrix} 0 < r < 1 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \end{matrix} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = r^8 e^{i8\theta} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \rho = r^8 < 1 \\ 0 < \varphi = 8\theta < 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow |w_1| \le 1$ ناحیه درون دایره واحد در صفحه w_1

و برای تبدیل ناحیه درون دایره واحد در صفحه w_1 تحت نگاشت دوم داریم:

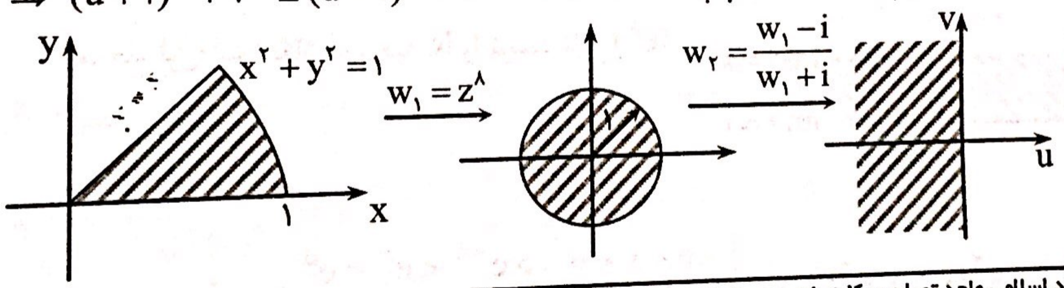
$$w_2 = \frac{w_1 - i}{w_1 + i} \Rightarrow w_1 = -i\frac{w_2 + 1}{w_2 - 1}$$

$$|w_1| \le 1 \Rightarrow \left|-i\frac{w_2 + 1}{w_2 - 1}\right| \le 1 \Rightarrow |w_2 + 1| \le |w_2 - 1| \quad , \quad w_2 = u + iv$$

مجموعه نقاطی که فاصله آنها از $z = -1$ کمتر از فاصله آنها از $z = 1$ است.

$\Rightarrow (u+1)^2 + v^2 \le (u-1)^2 + v^2 \Rightarrow u \le 0$ نیم صفحه سمت چپ

بنابراین:

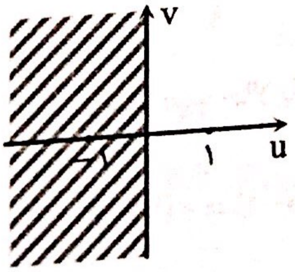


۱۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۷

$$|z-1| < 1 \xrightarrow{w = \frac{z-2}{z}} x < 0 \quad , \quad w = 1 - \frac{2}{z} \Rightarrow z = \frac{2}{1-w}$$

$$|z-1| < 1 \Rightarrow \left|\frac{2}{1-w} - 1\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{w+1}{w-1}\right| < 1 \Rightarrow |w+1| < |w-1|$$

نقاطی را نشان می‌دهد که فاصله آن‌ها از نقطه $w = u = 1$ بیشتر از فاصله آن‌ها از نقطه $w = u = -1$ باشد. یعنی همان نیم صفحه $u < 0$ یا $x < 0$.



۱۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶

تبدیل مورد نظر از رابطه روبرو حاصل می‌شود:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$$

$$\Rightarrow \frac{z-(-i)}{z-(0)}\cdot\frac{(i)-(0)}{(i)-(-i)}=\frac{w-(-1)}{w-(i)}\cdot\frac{(1)-(i)}{1-(-1)} \Rightarrow w=\frac{z-1}{i(z+1)}$$

برای پیدا کردن تصویر نقاط خارج دایره $|z-1|=1$ تحت این تبدیل داریم:

$$w=\frac{z-1}{i(z+1)} \Rightarrow z=\frac{1+iw}{1-iw}$$

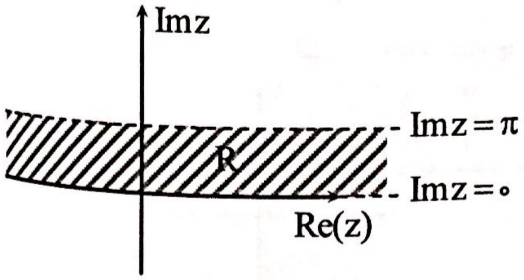
$$|z-1|\ge 1 \Rightarrow \left|\frac{1+iw}{1-iw}-1\right|\ge 1 \Rightarrow \frac{|2iw|}{|1-iw|}\ge 1 \Rightarrow |2w|\ge|1-iw| \quad , \quad w=u+iv$$

$$\Rightarrow 4u^2+4v^2\ge v^2+u^2+2v+1 \Rightarrow u^2+v^2-\frac{2}{3}v\ge\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow u^2+v^2-\frac{2}{3}v+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\ge\frac{1}{3} \Rightarrow u^2+(v-\frac{1}{3})^2\ge\frac{4}{9} \Rightarrow |u+i(v-\frac{1}{3})|\ge\frac{2}{3} \Rightarrow |w-\frac{i}{3}|\ge\frac{2}{3}$$

بنابراین تصویر مدنظر، نقاط خارج دایره به مرکز $\frac{i}{3}$ و شعاع $\frac{2}{3}$ است.

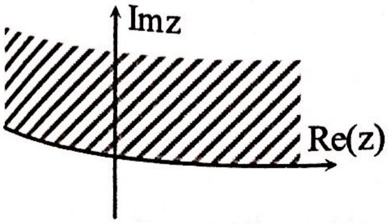
۱۷ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۷-۱۳۸۶



$$R=\{z=x+iy \mid 0<\operatorname{Im}z<\pi\}$$

مرحله اول: ابتدا نگاشت ناحیه R را توسط تابع (e^z) پیدا می‌کنیم.

$$\omega_1=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \begin{cases} -\infty<x<\infty \Rightarrow e^{-\infty}<e^x<e^{\infty} \\ \Rightarrow 0<e^x<e^{\infty} \end{cases}$$



شعاع دایره از صفر شروع می‌شود تا ∞ و $y=\theta$ که از صفر تا π است. پس حاصل نگاشت اول می‌شود نیم صفحه بالایی محور $\operatorname{Re}(z)$.

$$\Rightarrow R'=\{z=x+iy \mid \operatorname{Im}z>0\}$$

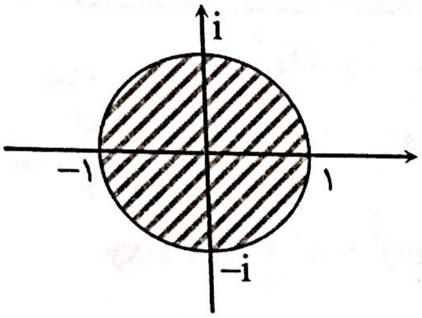
مرحله دوم: حالا باید تصویر ناحیه R' را تحت ضابطه نگاشت $f(z)=\omega=\frac{z-i}{z+i}$ به‌دست آوریم:

$$\omega=\frac{z-i}{z+i} \Rightarrow \omega(z+i)=z-i \Rightarrow \omega z+\omega i=z-i \to \omega z-z=-i-\omega i \to z(\omega-1)=-i-\omega i$$

$$\Rightarrow z=\frac{i+\omega i}{1-\omega}=\frac{i(1+\omega)}{1-\omega}\xrightarrow{\omega=u+iv} z=\frac{i(1+u+iv)}{1-u-iv}=\frac{i(1+u)-v}{(1-u)-iv}$$

$$=\frac{i(1+u)-v}{(1-u)-iv}\times\frac{(1-u)+iv}{(1-u)+iv}=\frac{i(1+u)(1-u)-v-v(1-u)-iv^2}{(1-u)^2+v^2}=z$$

در ناحیه R' گفتیم که $\operatorname{Im} z>0$ باید باشد.



$$\operatorname{Im} z=\frac{(1+u)(1-u)-v^2}{(1-u)^2+v^2}>0\rightarrow(1+u)(1-u)-v^2>0$$

$$\rightarrow 1-u^2-v^2>0\rightarrow u^2+v^2<1$$

یعنی نقاط درونی یک دایره به مرکز $(0,0)$ و به شعاع $R=1$.

۱۸) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۷–۱۳۸۶

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۱۹) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶–۱۳۸۵

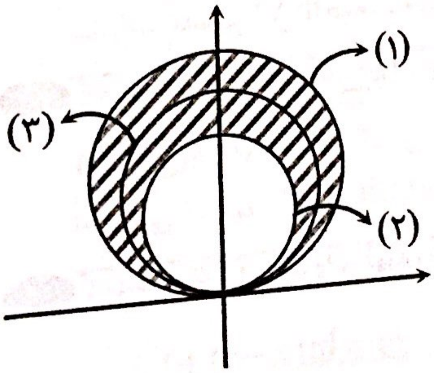
ابتدا تصویر مرزهای ناحیه را به‌دست می‌آوریم:

$$w=\frac{i}{z+1}\Rightarrow z+1=\frac{i}{w}\Rightarrow x+1+iy=\frac{i}{u+iv}=\frac{v+iu}{u^2+v^2}\Rightarrow\begin{cases}x+1=\dfrac{v}{u^2+v^2}\\ y=\dfrac{u}{u^2+v^2}\end{cases}$$

$$x=0:\ 1=\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow u^2+v^2-v+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\Rightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\qquad(1)$$

$$x=1:2=\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow u^2+v^2-\frac{v}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0\Rightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}\qquad(2)$$

تصویر خطی بین این دو خط را نیز به‌دست می‌آوریم. به عنوان مثال تصویر خط $x=\frac{1}{2}$:



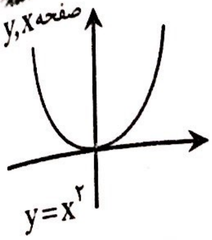
$$\frac{3}{2}=\frac{v}{u^2+v^2}\Rightarrow u^2+\left(v-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}\qquad(3)$$

بنابراین ناحیه بین دو دایره (۱) و (۲) تصویر ناحیه بین $x=0$ و $x=1$ می‌باشد.

۲۰) دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم دوم ۸۶–۱۳۸۵

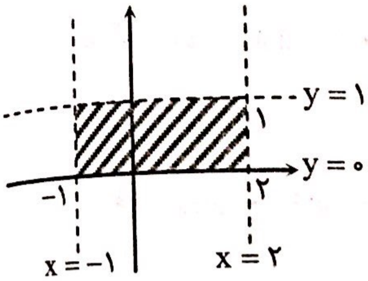
$$w=z^2\xrightarrow{z=x+iy}w=(x+iy)^2=\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2\\ v(x,y)=2xy\end{cases}$$

Scanned by CamScanner



$$y = x^۲ \Rightarrow \begin{cases} u = x^۲ - x^۴ \\ v = ۲x^۳ \to x^۳ = \frac{v}{۲} \to x = (\frac{v}{۲})^{\frac{۱}{۳}} \to u = (\frac{v}{۲})^{\frac{۲}{۳}} - (\frac{v}{۲})^{\frac{۴}{۳}} \end{cases}$$

۲۱ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم دوم ۸۶-۱۳۸۵

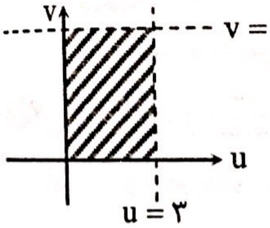


$R = \{z = x + iy \; ; -۱ < x < ۲ \; ; ۰ \le y \le ۱\}$

ابتدا ناحیه R را مشخص می‌کنیم. اکنون تابع $w = z^۲$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$w = z^۲ \xrightarrow{z=x+iy} w = (x+iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy$$

$$\to w = u + iv \to \begin{cases} u = x^۲ - y^۲ \\ v = ۲xy \end{cases}$$



$$-۱<x<۲ \to ۰ \le x^۲ < ۴ \qquad -۱<x<۲$$

$$۰ \le y \le ۱ \to ۰ \le y^۲ \le ۱ \qquad ۰ \le y \le ۱$$

$$۰ \le x^۲ - y^۲ \le ۳ \Rightarrow ۰ \le u \le ۳ \qquad ۰ \le xy \le ۲ \Rightarrow ۰ \le ۲xy \le ۴ \Rightarrow ۰ \le v \le ۴$$

۲۲ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

$$w = \frac{z+۱}{z+i} \Rightarrow z = \frac{۱ - iw}{w-۱} \Rightarrow z - ۱ = \frac{۲ - (۱+i)w}{w-۱}$$

$$\Rightarrow |z-۱| < ۱ \Rightarrow \left|\frac{۲-(۱+i)w}{w-۱}\right| < ۱ \Rightarrow |۲-(۱+i)w| < |w-۱| \quad , \quad w = u + iv$$

$$\Rightarrow (۲+v-u)^۲ + (v+u)^۲ \le (u-۱)^۲ + v^۲ \Rightarrow u^۲ + v^۲ - ۲u + ۴v + ۳ \le ۰$$

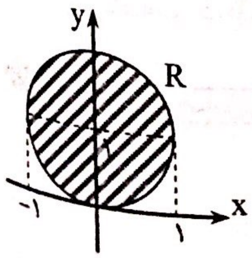
$$\Rightarrow (u-۱)^۲ + (v+۲)^۲ \le ۲ \Rightarrow |w - (۱-۲i)| \le \sqrt{۲}$$

بنابراین تصویر این ناحیه، ناحیه داخل دایره به مرکز $(۱-۲i)$ و شعاع $\sqrt{۲}$ است.

۲۳ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

www خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۴ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / پایان‌ترم اول ۸۶-۱۳۸۵

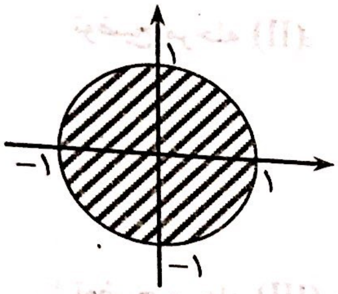


$R = \{x + ۲y \,|\, x^۲ + (y-۱)^۲ \le ۱\} \quad , \quad \omega = \ln(z-i) + ۱$

ابتدا ناحیه R را مشخص می‌کنیم.

$\to R = \{(x,y) \; ; \; x^۲ + (y-۱)^۲ \le ۱\}$ R یک دایره به مرکز (۰,۱) و به شعاع یک و تمام نقاط درونش است.

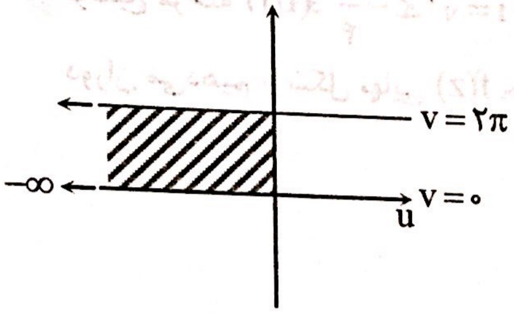
Scanned by CamScanner



۱) ابتدا نگاشت $z-i$:

$z-i=\omega$ یک نگاشت خطی است که R را یک واحد به سمت پایین منتقل می‌کند

$$\omega=z-i=(x+iy)-i=x+i(y-۱)$$

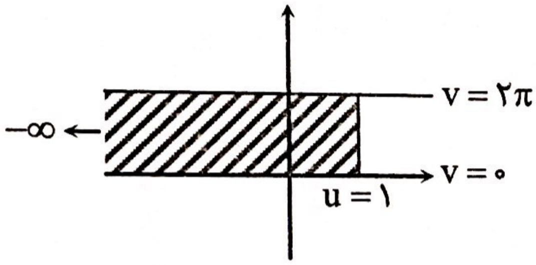


۲) حال نگاشت $\omega=\ln z$: $\omega=\ln z=\ln r+i\theta$

چون دایره R توپر است پس داریم $۰\le r\le ۱$

$$۰\le r\le ۱\to -\infty\le \ln r\le ۰\ ,\ \ ۰\le\theta\le ۲\pi\to \underbrace{۰\le\theta\le ۲\pi}_{v}$$

$$\omega=\ln r+i\theta\to\begin{cases}u=\ln r\to -\infty<u<۰\\ v=\theta\to ۰<v<۲\pi\end{cases}$$



۳) نگاشت $\omega=z+۱$: یک واحد انتقال به سمت راست.

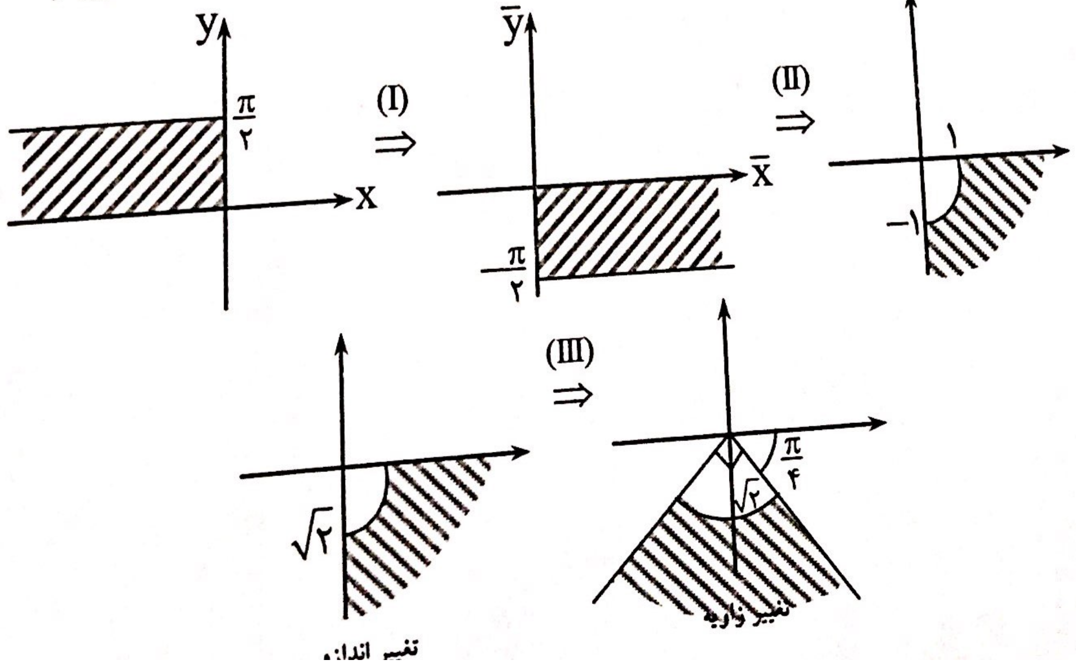
۲۵ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب / شهریور ماه ۱۳۸۵

WWW خوانندگان گرامی می‌توانند پاسخ این سؤال را به صورت رایگان از طریق وب سایت گروه آموزشی آمد به آدرس www.Amad-Group.ir (بخش پاسخنامه تکمیلی) دریافت نمایند.

۲۶ دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز / شهریور ماه ۱۳۸۵

$$R=\{(x,y)\,|\,x\le ۰,\le y\le\frac{\pi}{۲}\}$$

$$z\xrightarrow{(I)}H=-z\xrightarrow{(II)}W=e^{-z}\xrightarrow{(III)}f(z)=(۱-i)e^{-z}$$



توضیح مرحله (II):

$$W=e^{H} \Rightarrow \begin{cases} |W|=e^{\overline{x}} \Rightarrow ۱=e^{۰} \le |W| \le e^{\infty}=\infty \\ \arg W=\overline{y} \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} \le \arg W \le ۰ \end{cases}$$

توضیح مرحله (III): $۱-i=\sqrt{۲}\measuredangle -\frac{\pi}{۴}$: ابتدا W را به اندازه $\sqrt{۲}$ انبساط می‌دهیم. سپس به اندازه $-\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دهیم تا شکل نهایی f(z) حاصل شود.